

Maandblad voor de didactiek van de wiskunde

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren van Liwenagel en van de Wiskunde-werkgroep van de w.v.o.

46e jaargang
1970/1971
no 9
mei

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:
Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-30785.

Gelijkwaardigheid

J. VAN LINT
Zwolle

In de vierde klas van de B-afdeling hebben we dit jaar op school voor het laatst een groep die volgens de oude stijl door de eerste, tweede en derde klas is geleid en die nu de experimentele algebra (analyse) moet volgen. In het begin moesten ze in versneld tempo, die onderwerpen uit het nieuwe onderbouwprogramma leren, die we niet missen kunnen, zoals notaties uit de verzamelingenleer, relaties e.d. Het nadelige tijdverlies hierbij, werd gedeeltelijk goedgemaakt door de mogelijkheid om van wel aangebrachte kennis (vierkantsvergelijkingen, logaritmen enz.) gebruik te maken en tevens dus een flink stuk te repeteren. Bij het eerste proefwerk stuitten we op een kleine moeilijkheid, toen we wilden testen of ze begrepen dat voor de bepaling van de doorsnede van 2 oplossingsverzamelingen van 2 vergelijkingen, niet altijd beide vergelijkingen opgelost behoeven te worden. We namen toen 2 vijfde-graads vergelijkingen:

$$x^5-5x^3+10x^2+18 = 0 \quad \text{en:}$$

$$x^5-5x^3+108 = 0.$$

Hoewel het naar blijft, dat velen door de schrik van zo'n onbekend, 'vreemd' vraagstuk, er niet eens aan beginnen, kregen nu de anderen een moeilijkheid te verwerken, die we niet verwacht hadden:

$$\left.\begin{aligned} x^5-5x^3 &= -(10x^2+18) \\ x^5-5x^3 &= -108 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 10x^2+18 = 108 \Rightarrow x^2 = 9.$$

Men zou nu denken dat de oplossingsverzameling is $\{3, -3\}$. Na controleren blijkt dat voor $x = 3$ geldt:

$$\begin{aligned} 10x^2+18 &= 108 \\ x^5-5x^3 &\neq -108 \\ x^5-5x^3 &\neq -(10x^2+18). \end{aligned}$$

Vorig jaar was mij een gelijksoortige moeilijkheid opgevallen bij de bepaling van de gemeenschappelijke oplossingen van twee differentiaalvergelijkingen:

$$\text{I. } y = \tfrac{1}{2}xy' \quad \text{en} \quad \text{II. } y = xy'-x^2.$$

Begrijpelijk is het dat men de eventuele functies, die aan beide vergelijkingen voldoen gaat zoeken door gelijkstellen van de rechter-leden van de vergelijkingen:

$$\tfrac{1}{2}xy' = xy'-x^2 \Rightarrow y' = 2x \Rightarrow y = x^2+c.$$

Als we nu ter controle de gevonden functies invullen b.v. in II blijkt:

$$\forall_{x \in \mathbf{R}} : x^2+c = x \,.\, 2x-x^2.$$

Hieruit volgt dat $c = 0$ en dus alleen $y = x^2$ voldoet aan beide vergelijkingen. Bij de modernere onderwijs methoden proberen we al veel vroeger het begrip gelijkwaardigheid van twee vergelijkingen of van twee stelsels van vergelijkingen, duidelijk te maken. Bovenstaande ervaringen waren redenen om eens uit te zoeken of soortgelijke gevallen zich niet op een eenvoudiger niveau kunnen openbaren.

Hoewel ik na afloop van mijn overpeinzingen tot de conclusie gekomen ben, dat ik weinig zinvolle vraagstukken voor dit onderwerp heb kunnen bedenken en ik stellig hoop, dat men de navolgende voorbeelden niet als leerstof gaat behandelen, heb ik toch de gevonden ideeën in een artikel verenigd.

Als we in onze brugklassen de commutatieve of associatieve eigenschap van een bewerking goed duidelijk willen maken, dan hebben we daarvoor verschillende voorbeelden van bewerkingen nodig, die niet commutatief en/of niet associatief zijn. Het meetkundige voorbeeld uit Euclides **45**, 1 kan dan naast de bekende voorbeelden uit de algebra nuttig zijn.

Als we in de vierde klas het begrip continue functie gaan behandelen, hebben we enkele voorbeelden van discontinue functies nodig. Alvorens de definitie van continuïteit te geven, lijkt het mij verstandig de grafieken van verschillende soorten niet-continue functies te laten tekenen. Nadat hierbij in een klassegesprek, waarbij het voorbeeld van Vredenduin uit Euclides **45**, 1 of iets dergelijks ter sprake komt, uitvoerig het begrip discontinu behandeld is, kan men enige hoop op succes hebben bij het leren van de definitie van continue functie.

Als we willen laten zien dat voor het bewijs van de gelijkheid van 2 verzamelingen A en B, nodig en voldoende is dat $A \subset B$ en $B \subset A$, zullen we duidelijke voorbeelden moeten geven van echte deelverzamelingen, die op het eerste gezicht niet op echte deelverzamelingen lijken. Denk bijvoorbeeld aan de verzameling punten met gelijke afstanden tot 2 snijdende lijnen, of de verzameling punten op een coördinaat-as waarvan de coördinaten rationaal zijn.

Bij onze eerste schuchtere pogingen om het begrip gelijkwaardig te introduceren, hebben we nog niet zoveel van de 'echte' voorbeelden voorhanden, waarin oplossingen van vergelijkingen ingevoerd of verduisterd worden. Met 'echte' voorbeelden bedoel ik de opgaven zoals:

vergelijk: $\{x \in \mathbf{R} | x(x-1) = (x-1)\,.\,(6-x)\}$ en: $\{x \in \mathbf{R} | x = (6-x)\}$
of: $\{x \in \mathbf{R} | x^2 = 16\}$ en: $\{x \in \mathbf{R} | x = \sqrt{16}\}$
of: $\{x \in \mathbf{R} | {}^2\log x^2 = 4\}$ en: $\{x \in \mathbf{R} | 2\,.\,{}^2\log x = 4\}$.

Bij vele leerlingen blijken dit soort opgaven voortdurend weer verwarring te stichten. Indien niet voldoende herhaald wordt, schijnen sluimerende twijfels weer de overhand te krijgen.
Laten we nu eens even kijken naar het geval van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden. We kunnen op verschillende manieren te werk gaan:

$$\left.\begin{cases} x+y=1 \Leftrightarrow 2x+2y=2 \\ 2x-3y=12 \Leftrightarrow 2x-3y=12 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 5y=-10 \\ 2x+2y=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=-2 \\ 2x+2y=2 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=-2 \\ x=3 \end{matrix}\right\} \quad \text{òf:}$$

$$\left.\begin{cases} x+y=1 \Leftrightarrow x=1-y \\ 2x-3y=12 \Leftrightarrow 2x-3y=12 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=1-y \\ 2(1-y)-3y=12 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=1-y \\ 2-5y=12 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=1-y \\ y=-2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=3 \\ y=-2 \end{matrix}\right\}.$$

Komen wij en komen onze leerlingen nooit in de verleiding om die ene vergelijking die 'meegesleept' wordt, weg te laten en aan het eind er pas weer bij te halen? Het wekt toch de indruk dat die ene er slechts is om de geëlimineerde variabele te berekenen, als de andere bekend is? Ook hier ben ik van mening, dat we voorbeelden moeten hebben waar het misgaat, alvorens die gelijkwaardigheid een voor kinderen zinvolle achtergrond te kunnen geven.
Laat ik eens een poging wagen om zulke voorbeelden aan te geven (er zijn vast wel betere te vinden).

1 Bepaal de gemeenschappelijke oplossing van de vergelijkingen:

$x^2-x=0$ en $x^2-3x+2=0$ of anders gezegd:

Bepaal $\{x \in \mathbf{R} | x^2-x=0\} \cap \{x \in \mathbf{R} | x^2-3x+2=0\}$.

Een leerling die een vierkants-vergelijking op kan lossen, lost dit probleem waarschijnlijk zo op:

$$\begin{array}{ll} x^2-x=0 & x^2-3x+2=0 \\ x(x-1)=0 & (x-2).(x-1)=0 \\ x_1=0 \quad x_2=1 & x_1=2 \quad x_2=1 \end{array}$$

Conclusie: de gevraagde doorsnede is $\{1\}$.
Maar nu een leerling die dit niet kan of nog niet gehad heeft-
In soortgelijke gevallen is mij gebleken dat ze dan als volgt redeneren: voor de gemeenschappelijke oplossing geldt:

$$\begin{aligned} x^2-x &= x^2-3x+2 \\ -x &= -3x+2 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Conclusie: de doorsnede is $\{1\}$.

Zij zijn verbouwereerd als u aanmerking hebt op de oplossing omdat het antwoord toch goed is! Misschien is dat dan een les voor ons om de opgave voortaan anders te maken en wel zó b.v.:

2 Bepaal:

$$\{x \in \mathbf{R} | x^2 - x = 0\} \cap \{x \in \mathbf{R} | \tfrac{1}{3}(x^2 - 3x + 2) = 0\}.$$

Als ze ons niet door hebben, dan krijgen we te zien:

$$x^2 - x = \tfrac{1}{3}x^2 - x + \tfrac{2}{3}$$
$$\tfrac{2}{3}x^2 = \tfrac{2}{3}$$
$$x^2 = 1$$

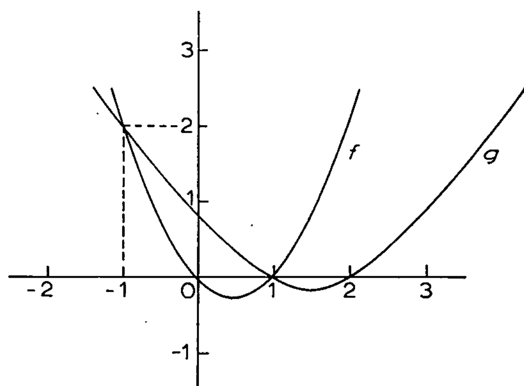
Conclusie: de doorsnede is $\{-1, +1\}$.
Nu is er een ingevoerde oplossing, die voldoet aan:

$$x^2 - x = \tfrac{1}{3}x^2 - x + \tfrac{2}{3} \neq 0.$$

De grafieken van de op **R** gedefinieerde functies

$$f: x \to x^2 - x \quad \text{en} \quad g: x \to \tfrac{1}{3}x^2 - x + \tfrac{2}{3}$$

maken een en ander ook duidelijk.



FIGUUR 1

Voor $x = -1$ zijn de functie-waarden wel gelijk, echter niet gelijk aan 0 maar aan 2.

3 De vorige moeilijkheid is misschien wel te ontlopen als volgt:

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x^2 = x$$

In $\frac{1}{3}(x^2 - 3x + 2) = 0$ kunnen we nu x^2 vervangen door x, zodat de vergelijking de volgende gedaante krijgt:

$$\tfrac{1}{3}(x - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Maar evengoed zou iemand x kunnen vervangen door x^2:

$$\tfrac{1}{3}(x^2-3x^2+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1.$$

Hoewel hier dus wel gebruikt wordt dat de drieterm x^2-3x+2 gelijk is aan 0, wordt er toch een oplossing ingevoerd.
We vragen ons nu af of we de eerste keer geluk gehad hebben, of dat er bij het vervangen van x door x^2 een min-teken ten onrechte wegvalt! Helaas ben ik te snel geneigd bij machten met even exponenten de moeilijkheden hieraan toe te schrijven. De zaak ligt hier toch wel iets lastiger. Laten we het nu nog eens een beetje vreemder doen en toch zorgen dat we niet x door x^2 vervangen, maar andersom.

$$x^2-x = 0 \Leftrightarrow x^2 = x$$
$$\tfrac{1}{3}(x^2-3x+2) = 0 \Leftrightarrow 2x^2-6x+4 = 0 \Leftrightarrow x^2+x^2-6x+4 = 0.$$

Vul nu x voor een van de termen x^2 in:

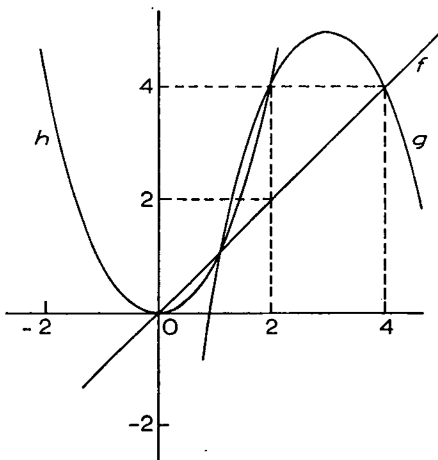
$$x^2+x-6x+4 = 0$$
$$x^2-5x+4 = 0$$
$$(x-4).(x-1) = 0.$$

Er blijkt nu een ingevoerde oplossing $x = 4$ te komen.
Op soortgelijke manier doorgaande kunnen we nog vele oplossingsparen $\{1, a\}$ ontdekken.
Feitelijk verschilt de methode die bij de laatste voorbeelden gegeven is niet van onze allereerste! Schrijven we de vergelijkingen iets anders op dan is dat wel in te zien:

4 $\quad x^2-x = 0 \Leftrightarrow x^2 = x$

$$2x^2-6x+4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -x^2+6x-4.$$

Voor de gemeenschappelijke oplossing geldt dan $x = -x^2+6x-4$. Ingevoerd



FIGUUR 2

worden de eventuele oplossingen van $x = -x^2+6x-4 \neq x^2$. De grafieken van de op **R** gedefinieerde functies:

$$f: x \to x \quad \text{en} \quad g: x \to -x^2+6x-4 \quad \text{en} \quad h: x \to x^2$$

demonstreren de moeilijkheden vrij duidelijk.
De functiewaarden $f(4)$ en $g(4)$ zijn wel gelijk aan elkaar, echter niet gelijk aan $h(4)$.

5 Nu nog eens de 'gewone' oplossing:

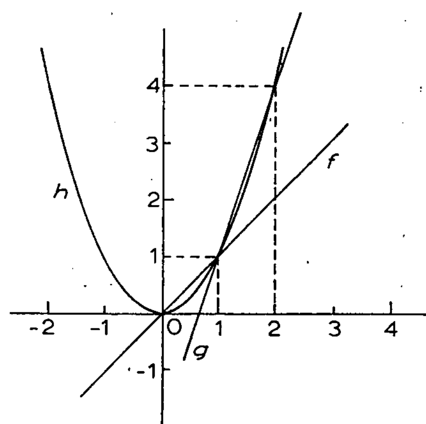
$$x^2-x = 0 \Leftrightarrow x^2 = x$$
$$x^2-3x+2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3x-2.$$

Voor de gemeenschappelijke oplossing geldt: $x = 3x-2$ en dus $x = 1$. Er zijn nu geen ingevoerde oplossingen omdat de oplossingsverzameling van:

$$x = 3x-2 \neq x^2$$

leeg is! Ook hier volledigheidshalve nog de toelichting met de grafieken van de op **R** gedefinieerde functies:

$$f: x \to x$$
$$g: x \to 3x-2$$
$$h: x \to x^2.$$



FIGUUR 3

Ten slotte kan men zich nog afvragen of het didactisch gezien wel juist is om in de ene vergelijking één van de 'letters' x te laten vervangen en een andere niet. In elk geval is het duidelijk dat bij de oplossing

$$x^2-x = 0 \wedge x^2-3x+2 = 0 \Leftrightarrow x^2-x = 0 \wedge x-3x+2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2-x = 0 \wedge x = 1$$

die vergelijking $x^2-x = 0$ 'meegesleept' wordt, omdat men zal moeten controleren of de verkregen oplossingen ook voldoen aan de bij de substitutie gebruikte vergelijking.

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA
Delft

LXXX Op dezelfde dag jarig.

Onlangs heeft Freudenthal [1]) in dit tijdschrift nog eens aandacht gevraagd voor een merkwaardig verschijnsel: de kans dat in een willekeurig gezelschap twee personen voorkomen met dezelfde geboortedag is veel groter dan men zou denken. Hij illustreerde dit door na de afleiding van een algemene formule de tabel te geven die voor een groep van 60 mensen de waarschijnlijkheden vermeldt voor het optreden van een gegeven aantal doubletten, tripletten en kwartetten. Om het verschijnsel te verifiëren, kan men in plaats van met *kansen* wellicht beter met *gemiddelden* opereren en dat is door von Mises, aan wie wij naar mijn beste weten deze toepassing der kansrekening danken, dan ook reeds gedaan. Stel dat aan ieder uit een groep van n personen, $A_1, A_2, \dots A_n$ volgens het toeval een nummer wordt toegewezen in een rij van N plaatsen, P_1, $P_2, \dots P_N$, met dien verstande dat elke plaats door een willekeurig aantal personen mag worden bezet. (In ons voorbeeld zijn P_i de dagen van het jaar en $N = 365$.) Tenslotte is elke plaats s-voudig bezet, waarbij s uiteraard ook nul kan zijn, maar hoogstens n. Wij berekenen het gemiddelde aantal $G(n, N; s)$ van s-voudig bezette plaatsen en wel door inductie. De kans dat A_i op P_j komt is $p = \frac{1}{N}$, de kans dat A_i niet op P_j komt is $q = \frac{N-1}{N}$; de kans dat geen enkele A op P_j komt (dus dat P_j nul-voudig bezet is) wordt q^n en het gemiddelde aantal nulvoudig bezette plaatsen derhalve $G(n, N; 0) = Nq^n$.
De kans dat A_i wel, maar geen andere A op P_j komt is pq^{n-1}; daar dit geldt voor elke i zal de kans dat P_i enkelvoudig bezet is gelijk aan npq^{n-1} zijn en dus $G(n, N; 1) = Nnpq^{n-1}$. De kans dat A_i en A_k $(i \neq k)$ beide op P_j komen, maar geen andere A op P_j komt is p^2q^{n-2}; daar dit geldt voor elk paar (i, k), waarvan er $\binom{n}{2}$ zijn, is de kans dat P_j tweevoudig bezet is gelijk aan

$$\frac{n(n-1)}{2!}p^2q^{n-2};$$

[1] H. Freudenthal, Samen jarig, Euclides 46 (1970–'71), 177–180.

daaruit volgt, omdat dit geldt voor elke j, dat $G(n, N; 2) = Nn(n-1)/2!p^2q^{n-2}$. Zo voortgaande vindt men algemeen voor het gemiddelde aantal s-voudig bezette plaatsen

$$G(n, N; s) = N\frac{n(n-1)\ldots.(n-s+1)}{s!}p^sq^{n-s}.$$

Volgens de binomium-formule is

$$\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}a^sb^{n-s} = (a+b)^n.$$

Door de differentiatie naar a volgt daaruit $\sum_{s=0}^{n} s\binom{n}{s}a^sb^{n-s} = na(a+b)^{n-1}$. Daarmee kan men verifiëren dat, gezien $p+q = 1$, naar behoren geldt

$$\sum_{s=0}^{n} G(n, N; s) = N, \qquad \sum_{s=0}^{n} sG(n, N; s) = n.$$

Nemen wij nu $N = 365$, $s = 2$ dan geeft $G(n, 365; 2)$ het gemiddelde aantal dagen waarop uit een groep van n personen er (precies) twee jarig zijn. Men kan zich afvragen voor welke waarde van n dit getal gelijk aan één wordt; lost men de vergelijking $G(n, 365; 2) = 1$ op dan vindt men voor n een waarde iets kleiner dan 30.
Men kan dit met een eenvoudige logaritmentafel gemakkelijk verifiëren. Wij vonden

$$G_0(30, 365; 0) = 336, G_1(30, 365; 1) = 27{,}7, G_2(30, 365; 2) = 1{,}1$$

Ter controle: $G_0+G_1+ G_2 = 364{,}8$,
$0.G_0+G_1+2G_2 = 29{,}9$.

De getallen $G_s(s \geqq 3)$ zijn klein. Voor een klas van 30 leerlingen zijn er dus (gemiddeld) 336 dagen zonder een verjaardag, op 28 dagen is telkens één leerling jarig, er is 1 dag waarop twee leerlingen jarig zijn.
In elke scholengemeenschap met een redelijk aantal klassen van ongeveer dertig leerlingen kan men de theoretisch gevonden uitkomsten aan de werkelijkheid toetsen. Wij trokken indertijd [2]) op het bureau van de studentenadministratie van de Technische Hogeschool te Delft willekeurig zes pakketjes van elk dertig kaarten; het bleek respectievelijk 0, 1, 2, 3, 1, 1, maal voor te komen dat twee geboortedata samenvielen.
Daar zelfs bij behoud van $N = 365$ de formule voor G nog twee parameters bevat, heeft een ieder in eigen sfeer ampel gelegenheid haar met de realiteit te confronteren. Zeer gewetensvolle persoonlijkheden worde geraden van schrikkeldagen en tweelingen geen probleem te maken.

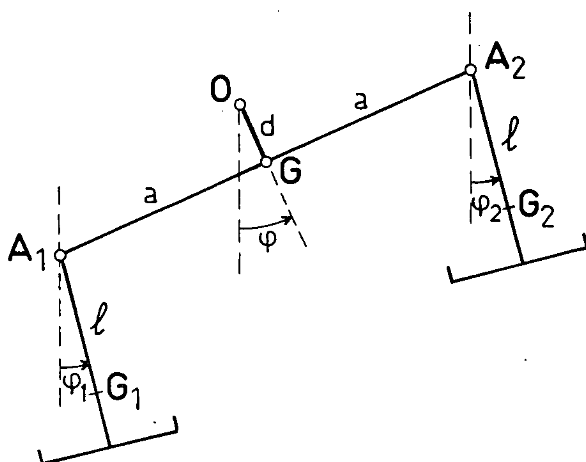
[2] O. Bottema, Kansrekening; Natuurkundige Voordrachten (Diligentia, 's-Gravenhage), Nieuwe Reeks, 33 (1954), 69–74.

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA
Delft

LXXXI Hoe schommelt een weegschaal?

Om deze vraag te beantwoorden gaan wij eerst het apparaat enigermate styleren. Wij stellen ons voor (fig. 1), dat de weegschaal W bestaat uit een juk, nl. het



FIGUUR 1

stuk OGA_1A_2, een star lichaam dat in een verticaal vlak om het vaste punt O kan draaien, en verder uit twee onderling gelijke vlakke starre lichamen, de schalen, die in A_1 en A_2 scharnierend zijn opgehangen en eveneens in het genoemde verticale vlak blijven. Het geheel is onderworpen aan de zwaartekracht (met versnelling g); er is nergens wrijving.
Zij voorts $OG = d$, $A_1G = A_2G = a$; de massa van het juk is m_0 en I_0 zijn traagheidsmoment t.o.v. O; om het aantal parameters wat te beperken nemen wij aan dat het zwaartepunt van het juk in G ligt. De massa van elke schaal is m; de zwaartepunten zijn G_1 en G_2, $A_1G_1 = A_2G_2 = l$, het traagheidsmoment van een schaal t.o.v. zijn zwaartepunt is I.

2 Er zijn drie getallen nodig om de stand van W te bepalen: W heeft drie

vrijheidsgraden. Wij nemen voorlopig de hoeken φ, φ_1 en φ_2 die resp. OG, A_1G_1 en A_2G_2 met de verticaal maken, alle in tegenwijzerrichting gemeten. Wij zullen de beweging van W onderzoeken met behulp van de vergelijkingen van Lagrange. Daartoe moeten de kinetische en de potentiële energie van W worden bepaald.
De kinetische energie van het juk is $T' = \frac{1}{2}I_0\dot{\varphi}^2$.
Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel OXY, met OX horizontaal naar rechts en OY naar beneden, geldt voor de coördinaten van G_1:

$$\begin{aligned} x_1 &= d\sin\varphi - a\cos\varphi + l\sin\varphi_1, \\ y_1 &= d\cos\varphi + a\sin\varphi + l\cos\varphi_1, \end{aligned} \tag{2.1}$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= d\cos\varphi\,.\,\dot{\varphi} + a\sin\varphi\,.\,\dot{\varphi} + l\cos\varphi_1\,.\,\dot{\varphi}_1, \\ \dot{y}_1 &= -d\sin\varphi\,.\,\dot{\varphi} + a\cos\varphi\,.\,\dot{\varphi} - l\sin\varphi_1\,.\,\dot{\varphi}_1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

De kinetische energie T_1 van de eerste schaal is dan:

$$\begin{aligned} T_1 &= \tfrac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2)+\tfrac{1}{2}I\dot{\varphi}_1^2 = \\ &= \tfrac{1}{2}m(a^2+d^2)\dot{\varphi}^2 + ml\{a\sin(\varphi-\varphi_1)+d\cos(\varphi-\varphi_1)\}\dot{\varphi}\dot{\varphi}_1 + \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}(ml^2+I)\dot{\varphi}_1^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Wij voeren nu de in de trillingstheorie gebruikelijke vereenvoudiging in door ons te beperken tot kleine uitwijkingen uit de evenwichtsstand, dus tot kleine waarden van φ, φ_1, φ_2 en hun afgeleiden.
Dan krijgt men

$$T_1 = \tfrac{1}{2}m(a^2+d^2)\dot{\varphi}^2 + mld\dot{\varphi}\dot{\varphi}_1 + \tfrac{1}{2}(ml^2+I)\dot{\varphi}_1^2. \tag{2.4}$$

Een overeenkomstige uitdrukking geldt voor de kinetische energie T_2 van de tweede schaal; voor die van W is

$$T = T'+T_1+T_2 = \tfrac{1}{2}P\dot{\varphi}^2 + mld\dot{\varphi}(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2) + \tfrac{1}{2}Q(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2), \tag{2.5}$$

waarbij

$$P = I_0+2m(a^2+d^2),\; Q = I+ml^2. \tag{2.6}$$

De potentiële energie van W is

$$V = -m_0gd\cos\varphi - 2mgd\cos\varphi - mgl(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)+c,$$

of na linearisatie en aangepaste constante

$$V = \tfrac{1}{2}Mgd\varphi^2 + \tfrac{1}{2}mgl(\varphi_1^2+\varphi_2^2), \tag{2.7}$$

met $M = m_0+2m$.

Men kan P interpreteren als het traagheidsmoment t.o.v. O van het juk waarop in A_1 en A_2 de massa van een schaal is geplaatst; Q is het traagheidsmoment van een schaal t.o.v. haar ophangpunt; M is de totale massa van W. Om de gevonden uitkomsten nog iets te vereenvoudigen voeren wij in plaats van φ_1 en φ_2 nieuwe coördinaten ψ_1 en ψ_2 in, bepaald door

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2, \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2 \tag{2.8}$$

en wij krijgen dan

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}P\dot{\varphi}^2 + mld\dot{\varphi}\dot{\psi}_1 + \tfrac{1}{4}Q(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2), \\ V &= \tfrac{1}{2}Mgd\varphi^2 + \tfrac{1}{4}mgl(\psi_1^2 + \psi_2^2). \end{aligned} \tag{2.9}$$

3 De vergelijkingen van Lagrange zijn

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\delta T}{\delta \dot{\varphi}} - \frac{\delta T}{\delta \varphi} + \frac{\delta V}{\delta \varphi} = 0 \tag{3.1}$$

en de analoge voor ψ_1 en ψ_2. Dat geeft

$$\begin{aligned} P\ddot{\varphi} + mld\ddot{\psi}_1 + Mgd\varphi &= 0, \\ 2mld\ddot{\varphi} + Q\ddot{\psi}_1 + mgl\psi_1 &= 0, \\ Q\ddot{\psi}_2 + mgl\psi_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

De laatste vergelijking bevat alleen de onbekende ψ_2; de oplossing is

$$\psi_2 = B_2 \cos(n_2 t + \alpha_2)$$

met B_2 en α_2 als integratieconstanten en

$$n_2 = (mglQ^{-1})^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

De eerste twee vergelijkingen (3.2) zijn gekoppeld.
Stelt men $\varphi = C_1 \cos(\lambda t + \alpha)$, $\psi_1 = C_2 \cos(\lambda t + \alpha,)$ dan krijgt men voor C_1 en C_2 de lineaire vergelijkingen

$$\begin{aligned} (-P\lambda^2 + Mgd)C_1 - mld\lambda^2 C_2 &= 0, \\ -2mld\lambda^2 C_1 + (-Q\lambda^2 + mgl)C_2 &= 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

die alleen van nul verschillende oplossingen hebben als

$$\begin{aligned} F(\lambda^2) &\equiv (-P\lambda^2 + Mgd)(-Q\lambda^2 + mgl) - 2m^2l^2d^2\lambda^4 \\ &= (PQ - 2m^2l^2d^2)\lambda^4 - g(mlP + MdQ)\lambda^2 + g^2Mmdl = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

De coëfficient van λ^4 is gelijk aan

$$(I_0 + 2ma^2)Q + 2md^2 I$$

en dus positief.
Wegens $-Qn_2^2 + mgl = 0$, heeft men voorts $F(n_2^2) < 0$.

Daaruit volgt dat $F(\lambda^2)$ twee reële nulpunten heeft, de ene kleiner en de andere groter dan n_2^2. Beide zijn positief, daar hun produkt en hun som positief zijn. Noemen wij hen respectievelijk n_1^2 en n_3^2, met positieve n_1 en n_3, dan geldt dus:

$$n_1 < n_2 < n_3, \tag{3.6}$$

Voor $\lambda^2 = n_1^2$ en voor $\lambda^2 = n_3^2$ worden de vergelijkingen (3.4) oplosbaar. Met de notaties

$$\begin{aligned} -Qn_1^2+mgl &= b_{11},\ 2mld^2n_1^2 = b_{12}, \\ -Qn_3^2+mgl &= b_{21},\ 2mld^2n_3^2 = b_{22}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

is in het eerste geval

$$C_1 = b_{11}B_1,\ C_2 = b_{12}B_1 \tag{3.8}$$

en in het tweede

$$C_1 = b_{21}B_3,\ C_2 = b_{22}B_3 \tag{3.9}$$

met willekeurige B_1 en B_3. Dat geeft tenslotte de algemene oplossing van (3.2):

$$\begin{aligned} \varphi &= b_{11}B_1 \cos(n_1t+\alpha_1)+b_{21}B_3 \cos(n_3t+\alpha_3), \\ \psi_1 &= b_{12}B_1 \cos(n_1t+\alpha_1)+b_{22}B_3 \cos(n_3t+\alpha_3), \\ \psi_2 &= B_2 \cos(n_2t+\alpha_2), \end{aligned} \tag{3.10}$$

die naar behoren zes integratieconstanten bevat: B_1, B_2, B_3 en verder de fasen α_1, α_2, α_3.
De frequenties n_1 en n_3 kunnen uit 3.5 worden bepaald. Men vindt voor n_1^2 en n_3^2 respectievelijk

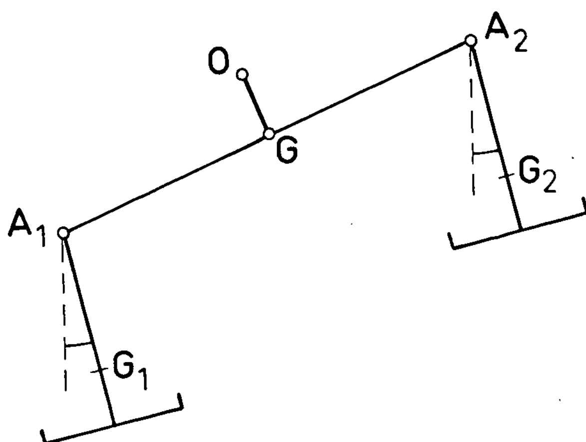
$$\tfrac{1}{2}g(mlP+MdQ\mp\sqrt{R})(PQ-2m^2l^2d^2)^{-1} \tag{3.11}$$

waarbij

$$R = (mlP-MdQ)^2+8Mm^3l^3d^3. \tag{3.12}$$

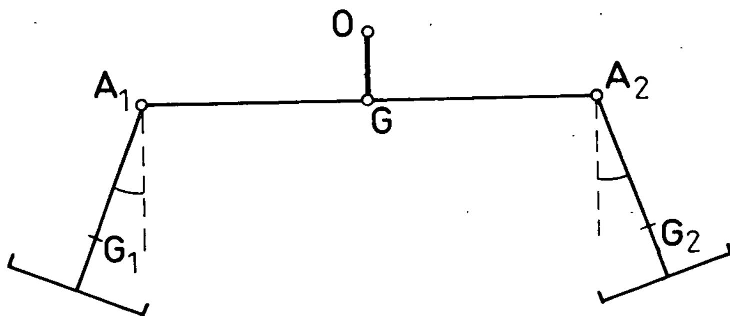
4 Na de formele oplossing van het probleem volgt hier een interpretatie van de uitkomst. Met gebruik van de terminologie van de geluidsleer kunnen wij zeggen dat W drie zuivere tonen kan voortbrengen, zoals dat altijd het geval is bij een stelsel met drie vrijheidsgraden. Er zijn drie hoofdtrillingen; bij zo'n beweging gaat elk punt van W harmonisch heen en weer, met vaste frequentie en alle in dezelfde fase. Bij de grondtoon, de trilling met de kleinste frequentie, n_1, is $B_2 = B_3 = 0$; bij de volgende is de frequentie n_2 en geldt $B_3 = B_1 = 0$; bij de tweede boventoon tenslotte, met de frequentie n_3 is $B_1 = B_2 = 0$. Zowel bij de langzaamste als bij de snelste trilling is $\psi_2 = 0$, d.w.z. $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}\psi_1$; bij deze bewegingen zijn dus A_1G_1 en A_2G_2 voortdurend evenwijdig.
Als W de grondtoon geeft is $\varphi : \varphi_1 = 2b_{11} : b_{12}$. Nu volgt uit 3.3 en 3.7 dat

b_{11} en b_{12} positief zijn. De gevolgtrekking is dat φ en φ_1 tijdens de gehele beweging hetzelfde teken hebben. Het trillingsbeeld is dat van fig. 2.



FIGUUR 2

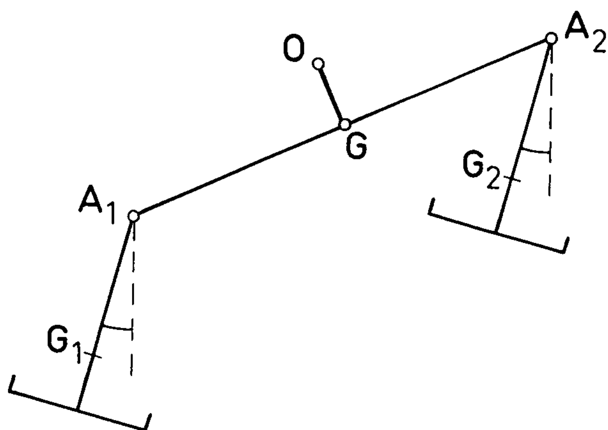
Bij de frequentie n_2 is $\varphi = 0$, het juk is in rust in horizontale stand. Voorts is $\psi_1 = 0$ en dus $\varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{1}{2}\psi_2$; de uitwijkingen der schalen zijn voortdurend tegengesteld. De frequentie n_2 is dan ook die van een fysische slinger met een vast ophangpunt. Het trillingsbeeld is in fig. 3 getekend.



FIGUUR 3

Bij de snelste trilling ten slotte geldt $\varphi : \varphi_1 = 2b_{21} : b_{22}$; men heeft $b_{21} < 0, b_{22} > 0$, waaruit volgt dat φ en φ_1 voortdurend tegengesteld teken hebben. Fig. 4 geeft het beeld.

De algemene beweging van de weegschaal is de superpositie van de drie hoofdtrillingen, elk met hun amplitude en fase. Uit (3.10) blijkt dat ψ_2, dus het *verschil* der uitslagen φ_1 en φ_2 altijd harmonisch trilt met frequentie n_2. Voorts laten deze vergelijkingen zien dat de grootheid $\theta_1 = b_{22}\varphi - b_{21}(\varphi_1 - \varphi_2)$ een harmonische beweging uitvoert met frequentie n_1 en $\theta_3 = b_{12}\varphi - b_{11}(\varphi_1 - \varphi_2)$



FIGUUR 4

een met frequentie n_3. De grootheden θ_1, ψ_2 en θ_3 zijn de z.g. *normale* coördinaten van de weegschaal.
Wie het gebruik van de vergelijkingen van Lagrange niet gewend is of deze methode te formeel vindt, kan op meer elementaire wijze te werk gaan door de reactiekrachten tussen het juk en de schalen, in A_1 resp. A_2, in te voeren en voor de drie onderdelen van W de bewegingsvergelijkingen (ten getale van zeven) op te schrijven. Hij kan dan ook het spel der krachten doorzien, dat tussen het juk en de schalen plaats vindt. Interessant is het ook de grote invloed na te gaan die de waarde van de afstand d op de beweging heeft; als d tot nul nadert blijft n_2 dezelfde, n_3 nadert tot n_2 en n_1 nadert tot nul.

flat

vijf-bij-zes matrix

een man verschuift
van x_{31} naar x_{35}
schijnbaar lopend

ik heb hem gezien:
de variabele mens

j. roelofsen

Een niet-aanschouwelijke introductie van de begrippen limiet en continuïteit

W. AMSE

Heerenveen

Motief: Deze fundamentele begrippen moeten we helaas als mosterd na de maaltijd introduceren omdat onze leerlingen te vroeg met grafieken hebben mogen (moeten) werken. Aanschouwelijkheid accentueert dit slechts.
We appeleren daarom alleen aan het grafisch kunnen voorstellen van de oplossingsverzameling van $|x-l| < \varepsilon$ middels de getallenlijn, welke voorstelling we *ε-omgeving van l* noemen.
Wegens $|x-l| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-l| < \varepsilon$ geldt stellig:

$$|x-l| < \varepsilon \Rightarrow |x-l| < \varepsilon \tag{1}$$

In woorden: Als x tot een ε-omgeving van l behoort, dan wordt x nog nauwkeuriger dan ε door l benaderd.
Tegen deze lezing van (1) plaatsen we de identieke functie $f(x) = x$. Voor (1) kunnen we dan schrijven:

$$|x-l| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon \tag{2}$$

In woorden (enigszins gewijzigd): Op een ε-omgeving van l worden de functiewaarden van f nog nauwkeuriger dan ε door l benaderd.
Vervolgens herinneren we aan de bepaling van b.v. $\frac{1}{x-1} + x$ via $x = \frac{x(x-1)}{x-1}$.
Hier kan feitelijk niet zonder meer = tussen staan.
Wel zijn $f(x) = x$ en $g(x) = \frac{x(x-1)}{x-1}$ op $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dezelfde functies, maar $f(1) = 1$ terwijl $g(1)$ niet gedefinieerd is.
We streven daarom naar de ontwikkeling van een begrip, dat op dit punt boven het begrip functiewaarde kan uitstijgen.
Met $l = 1$ zou in (2) $f(x)$ door $g(x)$ vervangen hebben mogen worden, als we in plaats van (1) gesteld hadden:

$$0 < |x-l| < \varepsilon \Rightarrow |x-l| < \varepsilon$$

Nu, hier is niets op tegen.
T.a.v. $f(x) = x$ krijgen we nu:

$$0 < |x-l| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon \tag{2a}$$

In woorden: Op een *gereduceerde* ε-omgeving van l worden de functiewaarden van f nog nauwkeuriger dan ε door l benaderd.

Via (2a) nu dan de geopperde vervanging:
T.a.v. $g(x) = \dfrac{x(x-1)}{x-1}$ geldt:

$$0 < |x-1| < \varepsilon \Rightarrow |g(x)-1| < \varepsilon$$

In woorden: Op een gereduceerde ε-omgeving van 1 worden de functiewaarden van g nog nauwkeuriger dan ε door 1 benaderd.
Daar één en ander zinvol en waar is voor ieder positief getal ε, wijzigen we bovenstaande bewoording aldus:
Het getal 1 heeft t.a.v. $g(x)$ de volgende eigenschap:
Welke nauwkeurigheid van benadering ε ook vereist wordt, steeds geldt, dat de functiewaarden van g op de gereduceerde $\underline{\varepsilon}$-omgeving van $\underline{\varepsilon}$ nog nauwkeuriger door 1 benaderd worden.
1 heet de *limiet* van g voor $x = \underline{1}$.
Omdat een en ander via $f(x) = x$ opgezet is, zijn de onderstreepte ε en 1 dezelfde ε en 1 als de niet onderstreepte.
Willen we het hierboven als boven-functiewaarde-uitstijgen-kunnende-begrip aangekondigde limietbegrip dan ook een grotere actieradius geven, dan moet dit aldus geschieden.
Het getal l heet de limiet van de functie f voor $x = a$ als geldt:
Welke nauwkeurigheid van benadering ook vereist wordt, steeds laat zich een gereduceerde δ-omgeving van a bepalen, waarop de functiewaarden van f nog nauwkeuriger door l benaderd worden. In deze omschrijving huist:

$$\lim_{x=a} f(x) = l \Leftrightarrow \text{bij iedere } \varepsilon > 0 \text{ is een } \delta > 0 \text{ te bepalen met}$$
$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon.$$

Als l bestaat, dan garandeert de definitie, dat er maar één getal kan zijn en dat dit getal meer dan functiewaarde kan zijn, komt door het feit, dat het al dan niet gedefinieerd zijn van $f(a)$ in het midden gelaten wordt door $0 < |x-a|$. Een en ander neemt niet weg, dat het vaak de functiewaarde zelf is, die aan de limietdefinitie voldoet. Dit is o.a. voor iedere a bij $f(x) = x$ het geval en voor iedere $a \neq 1$ bij $g(x) = \dfrac{x(x-1)}{x-1}$.

Geldt $\lim_{x=a} f(x) = f(a)$, dan noemt men f continu in a.

Continuïteit in een punt is alleen een theoretisch belangrijk begrip. In de praktijk gaat het om continuïteit op een interval, dit is in elk punt van dit interval. Hier kunnen we nu wel aan toevoegen:
Grafisch komt het neer op het feit, dat de grafiek van f tussen de vertikale lijnen door de eindpunten van het betreffende interval te tekenen moet zijn zonder dat we het potlood van het papier hoeven te nemen. Hoe het potlood dan wel voortbewogen moet worden, is voorlopig nog vers twee. Het gebruik van grafieken hebben we dan ook rijkelijk voorbarig doorgedrukt.

Opm.: De enige grafieken, waarvoor dit niet geldt zijn die van de goniometrische functies, omdat deze alleen meetkundig verkoopbaar zijn (ook in de onderbouw).
De invoering van deze functies met inprodukten is met een kanon op hazen schieten. Het elegantste bewijs voor de optellingsformules is toch via rotatiematrices in R_2.

$f(x) = x$ is overal continu. Het bewijs hiervan is bijna triviaal, want $0 < |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |x-a| < \varepsilon$ leert wegens $x = f(x)$ en $a = f(a)$ wat het implicaat betreft, dat met $\delta = \varepsilon$ voor iedere $a \in \mathbb{R}$ door $f(a)$ aan de limietdefinitie voldaan wordt.
Is $f(x)$ een polynoom, dan geldt t.a.v. de functie φ, die als volgt gedefinieerd is:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}:$$

1 a behoort niet tot de definitieverzameling.

2 Steeds is vereenvoudiging mogelijk via $x-a$, die in de *polynoom*functie $f'(x)$ resulteert.
Immers: $f(x)-f(a)$ is steeds een polynoom, dat na substitutie van a voor x steeds de waarde nul aanneemt. Volgens de factorstelling geldt dus:

$$f(x)-f(a) = (x-a)f'(x).$$

3 $\lim_{x=a} \varphi(x)$ bestaat altijd en is $f'(a)$.

Het is belangrijk, dat de leerlingen inzien, dat de derde uitspraak geponeerd kan worden omdat alle polynoomfuncties overal continu zijn. Hiertoe stellen we eerst nog eens naast elkaar:

$$f(x) = x \quad \text{en} \quad g(x) = \frac{x(x+2)}{x+2.}$$

Wegens $\lim_{x=-2} f(x) = f(-2) = -2$ en $g(x) = f(x)$ op iedere gereduceerde omgeving van -2 mogen we f door g vervangen in 'Welke nauwkeurigheid van benadering ook vereist wordt, steeds laat zich een gereduceerde δ-omgeving

van -2 bepalen, waarop de functiewaarden van f nog nauwkeuriger door -2 benaderd worden'.
Maar dan geldt per definitie: $\lim_{x=-2} g(x) = -2$.

Hierna $f(x) = x+1$ en $g(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-2} = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2}$.

2 behoort niet tot de definitieverzameling van g, maar $f(2) = 3$.
Voldoet dit getal nu aan de limietdefinitie t.a.v. f voor $a = 2$, m.a.w. is f continu in 2, dan is het tevens de limiet van g voor $x = 2$, omdat op iedere gereduceerde δ-omgeving van 2 geldt $f(x) = g(x)$. Het is dus inderdaad de continuïteit van de vereenvoudigde functie, die het hem hier steeds doet.
Het zal duidelijk zijn, dat de continuïteit van alle polynoomfuncties niet per exemplaar aangetoond kan worden.
Hierboven gaat het om $f(x) = x+1$, die de som is van $\varphi(x) = x$ en $\psi(x) = 1$.
De continuïteit van ψ op $\mathbb{R}$ is een nog grotere trivialiteit, dan die van φ. ψ heeft immers geen andere functiewaarden dan 1 en het willekeurig nauwkeurig benaderen van 1 door 1 is buiten kijf. Voor δ mag dus ieder willekeurig getal genomen worden, ongeacht welke ε vereist wordt.
Nu is *iedere* polynoomfunctie een compositie van φ en ψ als we als compositiewetten overeenkomen:
scalaire vermenigvuldiging: λf koppelt $\lambda \cdot f(x)$ aan x
optelling: $f+g$ koppelt $f(x)+g(x)$ aan x
vermenigvuldiging: fg koppelt $f(x) \cdot g(x)$ aan x.
Nu, dit doen we graag, want onze fel begeerde continuïteit is theoretisch een éénpuntszaak (mits dit punt maar willekeurig gekozen kan worden), die via de limietdefinitie gedirigeerd wordt, terwijl de eerste drie limietstellingen luiden:

$$\lim_{x=a} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x=a} \lambda f(x) = \lambda l$$
$$\lim_{x=a} f(x) = l_1 \wedge \lim_{x=a} g(x) = l_2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x=a} \{f(x)+g(x)\} = l_1+l_2 \\ \lim_{x=a} f(x)g(x) = l_1 l_2. \end{cases}$$

Maar:

Is $l = f(a)$, dan is λl juist $(\lambda f)(a)$.

Is $l_1 = f(a)$ en is $l_2 = g(a)$, dan is l_1+l_2 juist $(f+g)(a)$
is $l_1 l_2$ juist $fg(a)$.

Conclusie: Met $\varphi(x) = x$ en $\psi(x) = 1$ zijn alle composities hiervan overal continu.

Tot hier lijkt me een kwestie van enkele lessen.
Om hun fundamentele karakter zouden we de limietstellingen eigenlijk moeten bewijzen.

Wel zouden we het fundamentele ervan vooraf kunnen gaan onderstrepen, door het belang van $\lim\limits_{x=a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ t.a.v. f uit de doeken te doen.
Volgens mij kan dit als motivatie niet vroeg genoeg gedaan worden en hier sta ik ook aanschouwelijkheid voor, omdat onze leerlingen toch al door grafieken 'aangetast' zijn.
Hoe dit ook zij, bovengenoemde bewijzen zijn hoogst vervelend. Op dit punt zou men het over de 'functionaalrijenboeg' kunnen gooien. Dit appeleert tevens mooi aan het dynamische tijdperk, waarin men x, al functiewaarden barend, onbepaald dicht tot a liet naderen en waarvan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ nog getuigt.
De volgende limietdefinitie motiveert het om hier nog enig voorstellingsvermogen aan te spanderen:
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow$ bij iedere naar a convergerende rij $\{a_n\}$, waarvan geen enkele term a is, convergeert de functionale rij $\{f(a_n)\}$ naar l.
Een veel belangrijker aspect van deze definitie is echter: Convergentie van rijen (niet genoemd op blz. 39 van de definitieve programma's, wel op blz. XII van Nieuwe Wiskundeopgaven!) is belangwekkend en mogelijk sprekender dan het limietbegrip bij functies.
Gecombineerd met het begrip monotonie brengt een en ander de intervalschakeling binnen ons bereik. Hiermee beschikken we over een welkom equivalent van de stelling over de kleinste bovengrens, waarmee het bewijs van 'Een continue functie beeldt een segment af op een segment' wellicht haalbaar wordt. In ieder geval is dit didactisch een hoogst belangwekkende zaak geworden met het oog op differentialen.
We zouden het dan immers over deze boeg kunnen gooien: Is $y = y(x)$ differentieerbaar, dan pleegt men dit met de symbolen dy en dx, differentialen genoemd, te begeleiden. Het zijn infinitesimale grootheden, welke in het voorwetenschappelijke stadium van de analyse haar de naam infinitesimaalrekening hebben gegeven. Het zijn dan ook vage begrippen.
Infinitesimaal komt wel zo wat neer op: In het algemeen nimmer het juiste, maar steeds komt er een moment, vanwaar af geldt: des te kleiner, des te juister en ware het niet ondenkbaar, dan zou juistheid bij nul moeten optreden.
Differentieerbare functies zijn continu en wat bovengenoemde afbeelding betreft geldt:
Het segment $[x, x+h]$ wordt afgebeeld op het segment S, waarvoor in het infinitesimale geldt:

de lengte ervan is $f'(x)$ maal de lengte van $[x, x+h]$ (3)

Hiervan getuigt, afgezien van tekenkwesties:

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

De primaire differentiaal dx speelt domweg de rol van h. De hele gedachtengang

achter (3) knapt af als we $h = 0$ toelaten (vandaar: ... ware het niet ondenkbaar, dan zou ...). Derhalve: $dx \neq 0$.
Er zijn geen hinderlijke tekenkwesties als we (3) als volgt wijzigen: dy stelt in het infinitesimale $y(x+h)-y(x)$ voor.
Tegenwoordig zegt men:
dy is de eerste benadering van $y(x+h)-y(x)$.
Het roemruchte dee-ij-dee-iks, wat we maar al te graag als quotiënt gebruiken, maar het in wezen niet was, kan in laatstgenoemde vaagheid als het 'raaklijnvizier' ietwat geconcretiseerd worden.
Wegens $dx \neq 0$ en (4) is het voor ons nakaarters wel degelijk een quotiënt.
Terugkerend naar mijn onderwerp, meen ik te mogen vaststellen, dat we, wanneer we het pad van de rijen opgaan naar aanleiding van de troubles rond de limietstellingen, ons blootstellen aan tijdroof, die jegens de A-leerlingen onverantwoord is. En t.a.v. een all-round B-4 klas? Wie zal het zeggen; laat ik volstaan met de verwijzing naar de ontwikkeling van het onderwijs in de analyse aan de Duitse gymnasia.
Rest me nog enige opmerkingen te maken over de volgende vraag:
Welke mogelijkheden zijn t.a.v. de limietdefinitie belangrijk als 1) $f(a)$ wel gedefinieerd; 2) $f(a)$ niet gedefinieerd is?

1 De continuïteit en hiernaast het voldoen van $f(a)$ aan de limietdefinitie als we hierin $0 < |x-a| < \delta$ wijzigen in

hetzij $0 < x-a < \delta$ (rechtscontinu)
hetzij $0 < a-x < \delta$ (linkscontinu).

2 *a* De opheffing van de discontinuïteit van f in a door extra te definiëren: $f(a) = l$.
T.a.v. gelijknamigmakerij achten we dit steeds stilzwijgend geschied.
b l_1 bestaat als linkerlimiet, l_2 als rechter en $l_1 \neq l_2$.
c Het fenomeen der onbegrensdheid:
Hoe groot we het positieve getal G ook kiezen, steeds is er een positief getal δ te bepalen met

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > G.$$

Van dit belangrijke geval, dat vier mogelijkheden in zich herbergt, wordt op de volgende hoogst verwarrende wijze gewag gemaakt:

$$\lim_{x=a} |f(x)| = \infty.$$

d l kan niet bestaan omdat $f(x)$ op geen enkele gereduceerde omgeving van a gedefinieerd is.

Voorbeeld: $f(x) = \dfrac{x}{\sin \frac{1}{x}}$ t.a.v. $a = 0$.

Opmerking i.v.m. ad d): T.a.v. $\varphi(x) = f\{g(x)\}$ geldt:

1 $\lim_{x=a} g(x) = l \Rightarrow \lim_{x=a} \varphi(x) = f\{\lim_{x=a} g(x)\} = f(l)$ mits f continu is in l.

Deze toevoeging is noodzakelijk opdat $f(l)$ gedefinieerd is.
Is dit niet zo, dan geldt:

2 Als $\lim_{x=a} g(x) = l_1$, terwijl $g(x)$ in een gereduceerde omgeving van a de waarde l_1 niet aanneemt, dan volgt uit $\lim_{t=l_1} f(t) = l_2$, dat $\lim_{x=a} \varphi(x) = l_2$.

Zou er geen gereduceerde omgeving zijn, waarin $g(x)$ de waarde l_1 niet aanneemt, dan *was er geen gereduceerde omgeving van a, waarop $f\{g(x)\}$ gedefinieerd is*!

3 Is $g(x)$ continu in $x = a$ en $f(t)$ continu in $t = g(a)$, dan is $\varphi(x)$ continu in $x = a$.

Deze eigenschap verschilt niet wezenlijk van 1). Uit $g(x)$ continu in a volgt immers $l = g(a)$ en i.p.v. $f(l)$ gaat het nu dus om $f\{g(a)\}$. $f\{g(a)\}$ is gedefinieerd en met $f\{g(a)\} = \varphi(a)$ gaat 1) in 3) over.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Uit de bestuursvergaderingen

1. De jaarvergadering 1971 zal worden gehouden op zaterdag 16 oktober 1971 in het Transitorium II van het Universiteitscentrum 'De Uithof' te Utrecht.
2. Op 4 september zal, eveneens in 'De Uithof' een bijeenkomst naar aanleiding van de experimentele eindexamens 1971 plaats vinden.
3. Het Mavo-verband is geattendeerd op het bestaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en verzocht om over problemen op wiskundig gebied met de vereniging overleg te plegen.
4. Het bestuur wil gaarne de leden gelegenheid geven om in regionale bijeenkomsten de onderlinge contacten te vergroten.
   Leden die een voorstel voor een wetenschappelijke of didactische bijeenkomst of andere suggesties hebben worden uitgenodigd dit aan het secretariaat te berichten. Zij worden verzocht hun suggesties zo volledig mogelijk uit te werken.
5. Dr. J. K. van den Briel en Dr. P. G. J. Vredenduin hebben de vereniging op de paasconferentie A.T.M. in Lancaster vertegenwoordigd.
6. Na overleg van de besturen van de verschillende verenigingen voor docenten in een bepaald vak is opgericht de Raad van Vakgroepen (R.V.V.), die als overkoepelende instantie met de Raad van Leraren, 2e Afdeling zal samenwerken.

Pythagoras met matrices

C. P. VAN NIEUWKASTEELE
Waalre

Euclides is in het gelukkige bezit van een recreatierubriek. Het decembernummer van 1969 bevatte een opgave (no. 230) over natuurlijke getallen a, b, c met de eigenschappen: $a^2+b^2 = c^2$ en $|a-b| = 2$.
Naar aanleiding van de gegeven oplossing kwam de vraag op of het mogelijk is voor deze getallen een algemene formule te geven.
In de gegeven opgave zijn a en b blijkbaar beide even. Immers, waren a en b beide oneven, dan was c^2 een 4-voud $+2$, dus zeker niet het kwadraat van een natuurlijk getal. Het probleem is daardoor dan ook terug te brengen tot de vraag of er natuurlijke getallen a, b en c te vinden zijn met de eigenschappen: $a^2+b^2 = c^2$ en $b-a = 1$.
In het vervolg zullen we deze drietallen van de gedaante $(a, a+1, c)$, soms voorzien van een index, P-tripels noemen. Uitgaande van het bekende feit dat elk willekeurig P-tripel gevonden kan worden uit u^2-v^2, $2uv$ en u^2+v^2 met $u, v \in \mathbb{N}^*$, vinden we, als we tevens nog $u > v$ onderstellen, door proberen:

n	u_n	v_n	$u_n^2+v_n^2$	$u_n^2-v_n^2$	$2u_nv_n$	$2(u_n^2+v_n^2)$
0	1	0	1	1	0	2
1	2	1	5	3	4	10
2	5	2	29	21	20	58
3	12	5	169	119	120	338
4	29	12	985	697	696	1970
5	70	29	5741	4059	4060	11482

We hebben hier $n = 0$ ook toegelaten, omdat het P-tripel (0, 1, 1) nuttig zal blijken.
Bij beschouwing van u_n en v_n lijkt het volgende te gelden:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n+v_n \\ v_{n+1} &= u_n \end{aligned} \qquad (1)$$

of in matrixvorm geschreven:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

We kunnen nagaan dat

$$u_n^2 - v_n^2 - 2u_n v_n = \pm 1 \tag{3}$$

impliceert

$$u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 - 2u_{n+1} v_{n+1} = \mp 1,$$

maar daarmee weten we nog niet of we, (1) of (2) herhaald toepassend, alle gewenste P-tripels vinden. Wel zien we dat $u_{n+1} > u_n$ en $v_{n+1} > v_n$.
Uitgaande van een willekeurige u_m en $v_m \in \mathbb{N}^*$, die aan (3) voldoen, kunnen we een nieuw paar ook op de volgende manier vinden:

$$\begin{pmatrix} u_{m-1} \\ v_{m-1} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix}, \tag{4}$$

of anders geschreven:

$$\begin{aligned} u_{m-1} &= v_m \\ v_{m-1} &= u_m - 2v_m. \end{aligned}$$

Direct is weer na te rekenen dat $u_{m-1}^2 - v_{m-1}^2 - 2u_{m-1} v_{m-1} = \mp 1$ en ook dat u_{m-1} en v_{m-1} gehele getallen zijn, maar we weten nog niet onder welke voorwaarden u_{m-1} en $v_{m-1} \in \mathbb{N}^*$ zijn.
Om dit te onderzoeken gaan we eerst eigenschappen van u_m en v_m na.
Uit (3) volgt:

$u_m = v_m + \sqrt{2v_m^2 \pm 1}$ (minteken is vervallen wegen $u_m > v_m$).

Is $v_m > 1$, dan is $u_m > 1 + \sqrt{2 \pm 1} \geqq 1 + \sqrt{1} = 2$.

Is $v_m = 1$, dan is $u_m = 1 + \sqrt{2 \pm 1} = 1 + \sqrt{1} = 2$ (wegens $u_m \in \mathbb{N}^*$).

Is $v_m < 1$, dus $v_m = 0$, dan is $u_m = \sqrt{\pm 1} = 1$ (weer wegens $u_m \in \mathbb{N}^*$).

Als omgekeerd $u_m = 1$, dan vinden we uit (3) ook slechts $v_m = 0$ en analoog vinden we $v_m = 1$ als $u_m = 2$.

Dit combinerend vinden we

$$\begin{aligned} u_m &> 2 \Leftrightarrow v_m > 1 \\ u_m &= 2 \Leftrightarrow v_m = 1 \\ u_m &= 1 \Leftrightarrow v_m = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

We zullen nu aantonen dat uit $u_m \geqq 2$ en $v_m \geqq 1$ volgt dat voor de met behulp van (4) gevonden u_{m-1} en v_{m-1} geldt:

$$0 < u_{m-1} < u_m, \tag{6}$$

$$0 \leqq v_{m-1} < v_m. \tag{7}$$

(6) volgt direct uit $u_{m-1} = v_m$.
Om (7) te bewijzen stellen we $u_m = \alpha v_m$ ($\alpha > 0$). Substitutie in (3) levert:

$$|\alpha^2 - 2\alpha - 1| v_m^2 = 1.$$

Wegens $v_m \geqq 1$ geldt:

$$|\alpha^2 - 2\alpha - 1| \leqq 1$$

$$(\alpha^2 - 2\alpha - 1)^2 - 1 \leqq 0.$$

$$\alpha(\alpha - 2)(\alpha - 1 + \sqrt{3})(\alpha - 1 - \sqrt{3}) \leqq 0,$$

zodat we, omdat $\alpha > 0$, vinden

$$2 \leqq \alpha \leqq 1 + \sqrt{3} < 3.$$

Hiermee hebben we nu:

$$2v_m \leqq u_m < 3v_m,$$

$$0 \leqq u_m - 2v_m < v_m,$$

dus

$$0 \leqq v_{m-1} < v_m.$$

Gevolg. Nemen we een paar (u_m, v_m) dat voldoet aan (3) en waarvoor $u_m \geqq 2$, $v_m \geqq 1$, dan zijn de elementen u_{m-1} en v_{m-1}, verkregen volgens (4), beide $\geqq 0$ maar kleiner dan u_m resp. v_m.

Blijken u_{m-1}, v_{m-1} zelf ook $\geqq 2$ resp. $\geqq 1$ dan kunnen we (4) wederom toepassen, waarna het paar (u_{m-2}, v_{m-2}) verkregen wordt uit

$$A^{-1}\begin{pmatrix}u_{m-1}\\v_{m-1}\end{pmatrix} = A^{-2}\begin{pmatrix}u_m\\v_m\end{pmatrix},$$

wederom elementen uit $\mathbb{N}^*$ oplevert. Dit verkleiningsproces breekt (binnen $\mathbb{N}^*$) na een eindig aantal keren af. Zolang $u_k > 2$ dus $v_k > 1$ kunnen we het echter voortzetten. We kunnen stoppen op het ogenblik dat $u_k \leqq 2$ en dus $v_k \leqq 1$. Bij het paar $(u_k, v_k) = (2, 1)$ kan het nog één keer en we vinden dan $(1, 0)$. Uit (5) volgt direct dat we verder nog slechts één mogelijkheid hebben, nl. het paar $(1, 0)$.
Beginnen we bij een paar (u, v), dat voldoet aan (3), dan is er dus een natuurlijk getal n zodat

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = A^{-n}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},$$

zodat

$$A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = A^nA^{-n}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},$$

m.a.w. de formule (2) stelt ons in staat om alle (u, v) paren te vinden, die de gewenste P-tripels opleveren.
We willen nu ook nog u_n en v_n als functies van n schrijven. De eigenwaarden van A zijn $1+\sqrt{2}$ en $1-\sqrt{2}$ met eigenvectoren $(1+\sqrt{2}, 1)$ en $(1-\sqrt{2}, 1)$. Verder is

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$$

zodat

$$A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4}A^n\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{4}A^n\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}\\(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n\end{pmatrix}.$$

$$u_n = \frac{\sqrt{2}}{4}[(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}]$$

en

$$v_n = \frac{\sqrt{2}}{4}[(1+\sqrt{2})^{n}-(1-\sqrt{2})^{n}].$$

Tenslotte willen we nog de bedoelde P-tripels bepalen. We vinden dan:

$$u_n^2+v_n^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}[(\sqrt{2}+1)^{2n+1}+(\sqrt{2}-1)^{2n+1}],$$

$$u_n^2-v_n^2 = \tfrac{1}{4}[(\sqrt{2}+1)^{2n+1}-(\sqrt{2}-1)^{2n+1}]+\tfrac{1}{2}(-1)^n$$

en

$$2u_n v_n = \tfrac{1}{4}[(\sqrt{2}+1)^{2n+1}-(\sqrt{2}-1)^{2n+1}]-\tfrac{1}{2}(-1)^n.$$

Voor $n = 0, 2, 4, \ldots$ is $2u_n v_n < u_n^2-v_n^2$ en
voor $n = 1, 3, 5, \ldots$ is $2u_n v_n > u_n^2-v_n^2$.
Voor de elementen van het P-tripel $(a_n,\ 1+a_n,\ c_n)$ kunnen we dus schrijven:

$$a_n = \tfrac{1}{4}[(\sqrt{2}+1)^{2n+1}-(\sqrt{2}-1)^{2n+1}]-\tfrac{1}{2}$$
$$1+a_n = \tfrac{1}{4}[(\sqrt{2}+1)^{2n+1}-(\sqrt{2}-1)^{2n+1}]+\tfrac{1}{2}$$
($n \geqq 1$ als we alleen $a_n \in \mathbb{N}$ toelaten) (8)
$$c_n = \frac{\sqrt{2}}{4}[(\sqrt{2}+1)^{2n+1}+(\sqrt{2}-1)^{2n+1}].$$

We nemen nu de opgave 230 weer op. Vertaald in ons probleem zoeken we een P-tripel $(a, a+1, c)$ waarbij $500 < a < 1000$ en $500 < c < 1000$; we kunnen met behulp van (8) de oplossing wel opsporen, maar alleen via benaderingen. Voor niet al te grote getallen lukt het beter met (1). De wens die Kootstra in de opgave had verborgen treedt op voor $n = 4$, dus bij het door hem bedoelde P-tripel (1392, 1394, 1970). We weten uit bovenstaande afleiding nu echter zeker dat een nieuwjaarswens op deze wijze pas weer in het jaar 11482 kan worden geuit.

LITERATUUR :

W. Sierpinski, Pythagorian Triangles, Theory of Numbers.

Zo doe ik het

Met uitzondering van punt *B*

L. A. RANG
Doorn

In de analytische meetkunde wordt veelvuldig gevraagd naar de verzameling van punten *S* die aan zekere voorwaarden voldoen. Dikwijls wordt een parameter ten tonele gevoerd. Via eliminatie verkrijgt men dan de vergelijking van de verzameling. Men moet dan altijd controleren of elk punt van de gevonden kromme voldoet. Dit leidt dikwijls tot '... m.u.v. *B*'.

Het verbaast mij steeds meer, dat alle leraren die ik ontmoet (heb) zulk onderzoek verrichten met uitsluitend meetkundige methoden. Voor onze leerlingen is deze werkwijze gewoonlijk een donderslag bij heldere hemel: 'Je moet maar op het idee komen juist dié stand van de lijnen te bezien'. of: 'Wie garandeert me, dat er niet nog meer punten uitgezonderd moeten worden?' Zelfs heb ik het op regionale normenvergaderingen meegemaakt, dat men helemaal geen aanpak kende, (gefluisterd: 'Hoe doe je dat eigenlijk?').

Vaak zie je gebroken vergelijkingen opduiken en dan wordt er vreselijk moeilijk gedaan over noemers die niet nul mogen worden; en daaruit wordt dan wel eens iets geconcludeerd over uitzonderingspunten – vraag niet hoe! En wat moet dan een leerling, die helemaal geen noemers krijgt?
Ook wordt er gedeeld door variabele factoren, 'maar dat mag eigenlijk niet, want dan verduister je misschien wat ...'. (Mijn commentaar: doe dat dan niet! en: bij mij treden alle vergelijkingen ongebroken op.)

Hieronder volgt een voorbeeld, populair en verkort; zo doen mijn leerlingen het. Het betreft een geval, waarin de parameter lineair optreedt. In andere gevallen is een analoge aanpak mogelijk. Zie eindexamen gymnasium 1967.

Geg: $A(2, 0)$, $B(2, 2)$, $C(\lambda+2, 0)$ en $D(0, \lambda)$. AD snijdt BC in S.
Gevr: de verzameling der punten S, als D de y-as doorloopt.

Opl: Stel $S(\xi, \eta)$.

$$AD\colon (x-2)\lambda+2y = 0 \quad ; S \text{ op } AD\colon (\xi-2)\lambda+2\eta = 0 \qquad (1)$$

$$BC\colon (y-2)\lambda+2x-4 = 0; S \text{ op } BC\colon (\eta-2)\lambda+2\xi-4 = 0 \qquad (2)$$

Eliminatie van λ uit (1) en (2) levert $(\xi-2)^2-(\eta-1)^2 = -1$ (3)

Dus alle S liggen op de kromme met vergelijking $(x-2)^2-(y-1)^2 = -1$.
Nu iets uitgebreider. Zijn er uitzonderingspunten?
Er is alleen een S, als λ een (toegelaten) waarde heeft. Wanneer is dit laatste *niet* het geval?
Dit is misschien niet het geval als in (1) of (2) de coëfficiënt van λ gelijk is aan nul.
In (1): als $\xi = 2$. Welk punt van (3) kan dat opleveren? Door substitutie in (3) vindt men $\xi = 2$ met $\eta = 0$ of $\eta = 2$. Dus (2, 0) en (2, 2).
In (2): als $\eta = 2$. Dit levert via (3) het punt (2, 2).
Onderzocht moet worden of (2, 0) en ook of (2, 2) wel punten S zijn. Ze zijn het niet, als er geen λ-waarde is.

Eerst (2, 0). Substitueer in (1): $0 \cdot \lambda+0 = 0$
in (2): $-2\lambda+4-4 = 0$.
Dit stelsel levert $\lambda = 0$. Er is dus een λ-waarde, derhalve is het punt (2, 0) van (3) een punt S.

Nu (2, 2). Substitutie in (1): $0 \cdot \lambda+4 = 0$
in (2): $0 \cdot \lambda+4-4 = 0$
Dit stelsel levert geen waarde voor λ. Dus het punt (2, 2) van (3) is niet een punt van S en behoort niet tot het eliminatieresultaat (3).

Conclusie: De verzameling der punten S bestaat uit alle punten van de kromme met vergelijking $(x-2)^2-(y-1)^2 = -1$ m.u.v. het punt $B(2, 2)$.

Samenvatting: Schrijf alle vergelijkingen ongebroken. Trek je niets aan van noemers die tijdens de herleidingen en berekeningen optreden.
Bezie de coëfficiënten van de parameter in (1) en (2). Als deze nul zijn dan via (3) de 'dubieuze' punten opzoeken. Substitutie daarvan in (1) en (2) geeft uitsluitsel.
Is de parameter aan grenzen gebonden, dan schrijft men de parameter expliciet, uit (1) of (2). Dat levert de grenzen van ξ en η. Zie de volgende vraag bij dit examen.

Opmerking: Soms kan men uit (1) en (2) de parametervergelijking van de gevraagde kromme vinden: $\xi = f(\lambda)$ en $\eta = g(\lambda)$. Onderzoek welke waarden ξ en η kunnen aannemen. Deze methode voert vaak op zijwegen voor de leerlingen, is meestal zeer omslachtig en bovendien vaak vrijwel onuitvoerbaar (als (1) of (2) bijvoorbeeld kwadratisch zijn in ξ en η).
Bovengenoemde methode is snel, effectief en voor elke leerling begrijpelijk. Bovendien gaat ze niet gepaard met de in aanhef genoemde onzekerheden. Uiteraard moet o.a. de notatie in het nieuwe programma veranderd worden.

Korrel CLXXII

Opmerking naar aanleiding van het begrip functie

Het begrip functie, zoals wij dat thans kennen, is door een evolutie van enige eeuwen geleidelijk ontstaan uit vage en onscherpe begrippen dienaangaande. Nog tot in het einde van de vorige eeuw en het begin van deze eeuw vindt men in de literatuur beschouwingen en polemieken over de vraag wat een functie is of althans wat men eronder moet verstaan. Daarin speelt het begrip continuïteit een rol, maar men had daarover verwarde denkbeelden; pas later (Cauchy) werd daarvan een goede definitie gegeven. Er is in de literatuur sprake van 'echte' functies. 'Echte' functies waren in ieder geval continu. Een 'echte' functie was een relatie tussen twee variabelen die kon worden beschreven door *één wet*, die kon worden gedefinieerd met de gebruikelijke operaties als optelling, vermenigvuldiging, goniometrische operaties enz. Men meende dat elke continue functie aldus analytisch kon worden voorgesteld en men dacht aanvankelijk dat dat voor niet continue functies niet mogelijk was. Pas later zag men in dat dit denkbeeld onjuist was.
Cauchy was de eerste mathematicus die gewezen heeft op de ontoereikendheid van dit soort van beschouwingen. Hij illustreerde dit aan de functie die gelijk is aan $+x$ voor positieve waarden van x en gelijk is aan $-x$ voor negatieve waarden van x en voor $x = 0$ gelijk is aan 0. Zij werd niet als een 'echte' functie beschouwd want zij werd niet gedefinieerd door één wet; zij was ook niet 'continu'. Deze functie bestond namelijk, in de oude zienswijze, uit de samenstelling van delen van twee continue functies, te weten de functies die voor elke waarde van x gelijk zijn aan $+x$ resp. $-x$. Cauchy merkte op dat deze functie anderzijds wel door één wet kon worden gedefinieerd, nl. door ze te schrijven als $+\sqrt{x^2}$ of door ze te definiëren door de integraal

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2 \mathrm{d}t}{t^2+x^2}.$$

Hij concludeerde hieruit tot de onhoudbaarheid van de tot dan geldende beschouwingswijzen. Cauchy was de eerste mathematicus die aan de analyse de exacte vorm wist te geven en zijn definitie van continuïteit van een functie sluit aan bij de huidige definitie.
Er zijn uiteraard voor de leerlingen van het voortgezet onderwijs talloze voorbeelden te maken van functies die 'niet door één wet' kunnen worden gedefinieerd, hetzij door de keuze van de functiewaarden, hetzij door keuze van het definitiegebied.
In enige gesprekken met docenten kwam het merkwaardige feit naar voren dat vele leerlingen blijkens hun ervaring op de aldus gedefinieerde functies reageren

met opmerkingen als 'dat is niet eerlijk', 'dat is flauw' of 'dat is niet één functie, maar dat zijn er twee'.
Het zou interessant zijn eens te analyseren op grond waarvan deze leerlingen aldus reageren. Waarom zijn dergelijke functies in hun ogen niet eerlijk? Het lijkt alsof de leerlingen in hun ontwikkelingsgang ten aanzien van de wiskunde dezelfde fasen doorlopen als zich in de historische ontwikkeling hebben voorgedaan. Het ligt voor de hand te veronderstellen dat dergelijke misverstanden kunnen worden vermeden door zeer zorgvuldig te werk gaan bij de invoering van het begrip functie en dit zou misschien al vroeg moeten geschieden.
Het probleem lijkt mij interessant genoeg om te worden overwogen.

Prof. Dr. A. F. Monna
Utrecht

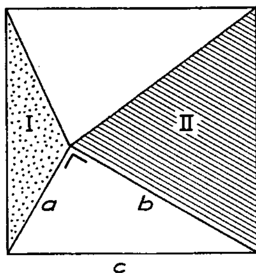
Korrel CLXXIII

De Stelling van Pythagoras

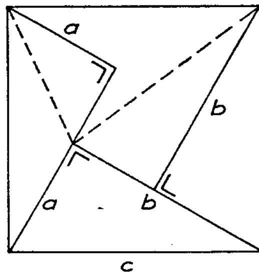
Onder de bewijzen die van de Stelling van Pythagoras in onze Nederlandse schoolboeken voorkomen, nemen die welke berusten op oppervlakte-berekeningen een betrekkelijk geringe plaats in. Het meest bekend is nog het eenvoudige bewijs, waaraan de figuur herinnert die bij herhaling dienst heeft gedaan als vignet in het wiskundetijdschrift voor jongeren '*Pythagoras*':



Voor een eveneens eenvoudig bewijs verwijzen we naar de figuren 1 en 2.



FIGUUR 1



FIGUUR 2

De rechthoekige driehoek met zijden a, b en c is getekend binnen het vierkant op de schuine zijde c, zoals dat ook het geval is in het beroemde bewijs van

Annairizi, waarnaar we in een opmerking zullen verwijzen. Volgens een bekende planimetrische eigenschap, die niet alleen voor een vierkant geldt, maar voor een willekeurig parallellogram, zijn in fig. 1 de gearceerde en de gestippelde driehoek samen even groot als de beide wit gebleven driehoeken samen. Hieruit volgt:

$$\mathrm{I}+\mathrm{II} = \tfrac{1}{2}c^2.$$

Voorts blijkt:

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{2}a^2 \qquad \text{en} \qquad \mathrm{II} = \tfrac{1}{2}b^2.$$

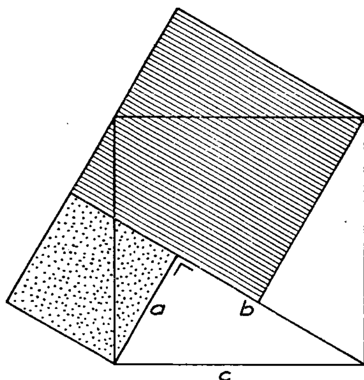
Dit volgt uit het feit, dat de hoogtelijnen in de driehoeken I en II op de zijden a en b opvolgend eveneens a en b zijn. Het trekken van deze hoogtelijnen betekent een partiële voltooiing van het bovengenoemde vignet. We hebben dus:

$$\tfrac{1}{2}a^2+\tfrac{1}{2}b^2 = \tfrac{1}{2}c^2,$$

dus

$$a^2+b^2 = c^2$$

Opmerking. De relatie tussen het gegeven bewijs met oppervlakteberekeningen en het metriekloze bewijs van *Annairizi* springt in het oog bij de beschouwing van fig. 3.



FIGUUR 3

Dat de beide vierkanten op de rechthoekszijden samen gelijk zijn aan het vierkant op de schuine zijde wordt met behulp van twee translaties of twee rotaties bewezen.

Joh. H. Wansink.
Arnhem

Op de korrel

de bespreking van: M. Kindt e.a., *Moderne Algebracursus* dl III, vwo. uitg.: Malmberg, 's-Hertogenbosch, door Dr. W. A. M. Burgers in Euclides jg. 46 no 5.

Wij zijn van mening dat Dr. Burgers in bovengenoemde boekbespreking op minstens twee punten faalt. (Voor de goede orde: wij gebruiken met veel plezier dit boek en hebben daarom de pretentie dit boek en de recensie te kunnen beoordelen.)

a Vrijwel de gehele bespreking wordt besteed aan een vergeefse poging een 'fundamentele fout' in de theoretische opzet van dit boek aan de kaak te stellen.

b Aan andere zaken die voor de lezer van zo'n boekbespreking van belang zijn wordt geen aandacht geschonken.

ad a Burgers wrijft de auteurs aan dat ze de methode van de staartdeling toepassen om aan te tonen dat $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$
Hier volgt de werkelijke gang van zaken:
De auteurs tonen eerst aan dat de breuk $\frac{13}{8}$ d.m.v. een staartdeling met rest 0 te schrijven is als 1,625.
Daarna geven ze een tweede manier en tonen aan dat:
$\boxed{\frac{13}{8} \in [1; 2]}$, $\boxed{\frac{13}{8} \in [1{,}6; 1{,}7]}$, $\boxed{\frac{13}{8} \in 1{,}62; 1{,}63]}$ en dan blijkt dat $\boxed{\frac{13}{8} = 1{,}625}$.
Vervolgens staat er op blz.19 e.v.:

Als je nu denkt dat elk rationaal getal als eindige decimale breuk geschreven kan worden, heb je het mis!
Een tegenvoorbeeld levert ons het getal $\frac{1}{3}$.
Aan de staatdeling 3/1,0000 . . .\0,3333 . . .

```
 9
 --
 10
  9
 --
  10
   9
  --
   10
    9
   --
    1
```

komt nooit een eind; steeds vind je dezelfde *rest* nl. 1.
Gaan we volgens de 'segmentmethode' te werk, dan komt er:

$0 < \frac{1}{3} < 1$, dus $\boxed{\frac{1}{3} \in [0; 1]}$.

We vergelijken nu $\frac{1}{3}$ achtereenvolgens met 0,1; 0,2; 0,3; ... 0,9;

$0{,}1 = \frac{3}{30}$; $0{,}2 = \frac{6}{30}$; $0{,}3 = \frac{9}{30}$; $0{,}4 = \frac{12}{30}$ ... $\frac{1}{3} = \frac{10}{30}$ } dus: $\frac{1}{3} \in [0{,}3;\ 0{,}4]$

Vervolgens vergelijken we $\frac{1}{3}$ met 0,31; 0,32; 0,33; ... 0,39:

$0{,}31 = \frac{93}{300}$; $0{,}32 = \frac{96}{300}$; $0{,}33 = \frac{99}{300}$; $0{,}34 = \frac{102}{300}$ ... $\frac{1}{3} = \frac{100}{300}$ } dus $\frac{1}{3} \in [0{,}33;\ 0{,}34]$

Vervolgens vergelijken we $\frac{1}{3}$ met 0,331; 0,332; 0,33; ... 0,339.

$0{,}331 = \frac{993}{3000}$; $0{,}332 = \frac{996}{3000}$; $0{,}333 = \frac{999}{3000}$; $0{,}3334 = \frac{1002}{3000}$ ... $\frac{1}{3} = \frac{1000}{3000}$ }.

dus $\frac{1}{3} \in [0{,}333;\ 0{,}33\dot{3}]$.

Enzovoort.
Blijkbaar kan $\frac{1}{3}$ niet als eindige decimale breuk worden geschreven, anders gezegd: $\frac{1}{3} \notin D$.

We schrijven nu: $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ of korter $\frac{1}{3} = 0{,}\dot{3}$

Dan komt de afspraak, geschreven in een kader (een gebruikelijke methode in dit boek om definities, stellingen e.d. aan te geven).

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ betekent
$\frac{1}{3} \in [0;\ 1]$
$\frac{1}{3} \in [0{,}3;\ 0{,}4]$
$\frac{1}{3} \in [0{,}33;\ 0{,}34]$
$\frac{1}{3} \in [0{,}3333;\ 0{,}34]$
$\frac{1}{3} \in [0{,}3333;\ 0{,}3334]$
enz.

Vervolgens komen er vier plaatjes waarin gedemonstreerd wordt waar $\frac{1}{3}$ op de getallenlijn zijn plaats vindt in genoemde segmenten. Dan komt de laatste zin:

We noemen $0{,}\dot{3}$ (= 0,3333...) een oneindig repeterende decimale breuk.

Uit de toevoeging van het kader blijkt duidelijk dat $\frac{1}{3} = 0{,}3333.$ *niet* met een staartdeling wordt gedefinieerd maar m.b.v. een segmentenrij.
In dit boek wordt de segmentenrij gebruikt als basis voor de opbouw van de reële getallen. Het doet wat vreemd aan dat Burgers met een staartdeling 'aantoont' dat $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$; iedere gebruiker van dit boek zal met weinig moeite kunnen aantonen dat er geen inkrimpende en verschrompelende segmentenrij te construeren is zo dat (voor $x = 2$ genomen).

1+2+4+9+ ... (wat dat ook zijn mag)

tot elk segment van deze rij behoort.

Toch meent Burgers dat die staartdeling essentieel is in dit boek. De conclusie kan dan alleen maar zijn dat Burgers het boek niet zorgvuldig heeft doorgenomen alvorens zijn recensie te schrijven. De lezers van Euclides en vooral de auteurs zijn niet gebaat bij zo'n boekbespreking.
Wageningen

W. Bergman, W. Kremers, W. Versluis.

Naschrift:

Mijn voornaamste bezwaar heb ik nu tegen de mij wiskundig onbekende term 'enz.,' zelfs tegen alle 'oneindige' processen, die op de leerlingen de indruk maken van schimmen spelen. Men zal wel exactheid geleidelijk kunnen opvoeren, aangepast aan de behoefte van de leerlingen. Het is tegen deze te vroege 'scientification' waartegen ik heb willen waarschuwen.

Burgers

Boekbespreking

D. C. Murdoch, *Linear Algebra*, John Wiley & Sons, London, 88/–.

In 1957 publiceerde de auteur 'Linear algebra for undergraduates'. Hij moest uitgaan van de onderstelling dat deze tot dan toe nog geen kennis gemaakt hadden met een abstracte benadering van de algebra.
De situatie is intussen grondig gewijzigd, vandaar dat de uitgave van 1957 herschreven diende te worden. Het is een leerboek geworden dat voor studerenden hier, goede diensten kan bewijzen, doordat de opbouw zeer geleidelijk plaats vindt, met eenvoudige uitgewerkte voorbeelden de nieuwe ideeen toegelicht worden en telkens een stel opgaven volgen, waarvan de oplossingen in een appendix worden aangeboden ter controle. Enkele steekproeven gaven enkele onjuistheden in deze resultaten, b.v. blz. 217 opgave 1c, de beide complexe eigenwaarden missen een factor $\frac{1}{3}$. Het spoor van de matrix is ook $\frac{5}{3}$ en niet 5. Opgave 3b, de tweede eigenvector is niet $(-3, 2)^T$ maar $(2, -3)^T$. Blz. 227 de oplossingen van de differentiaalvergelijkingen van 1a en 1b zijn onjuist opgegeven. Blz. 233. In opgave 2 wordt verwezen naar 6.7 i.p.v. 6.17, maar dit soort ongelukjes is menselijk.
Een kort overzicht van de inhoud.
Eerst een inleiding in de driedimensionale analytische meetkunde. Vectoren zijn puntenparen, eerste punt vast, de afstand ervan is de lengte van de vector, de tekening een pijl. Het 'dot' produkt wordt op de klassieke wijze gedefinieerd, notatie $a \cdot b$.
Oriëntatie en inhouden komen pas op blz. 158 ter sprake. Normaalvectoren van vlakken moeten echter ingevoerd worden. Dit geschiedt door de componenten m.b.v. dotprodukten te berekenen, met 2×2 determinanten worden de resultaten gememoriseerd. Dit heeft het bezwaar dat men de stand van de normaalvector van b.v. a en b slechts kan tekenen als de coördinaten van a en b in concreto gegeven zijn. Maar dit euvel heft zich later wel op.
Na de inleiding volgt een axiomatische opbouw van vectorruimten, abstracte vectoren dus. Hierbij worden abstracte lengte (norm) en abstract inwendig produkt gedefinieerd, notatie (a, b).
De Cauchy-Schwarz ongelijkheid wordt algemeen bewezen (op laatste regel blz. 160 moet (X, Y) veranderd worden in (X, X)), het Gram-Schmidt proces, diagonalisering- en triangulariseringsprocessen worden besproken, het theorema van Cayley-Hamilton wordt wel genoemd, maar niet bewezen, wat jammer is, want de halve bladzijde nodig voor het bewijs had er wel bijgevoegd kunnen worden.
Bestudeerd worden dan kwadratische vormen, differentiaalvergelijkingen.
Of bijv. A als vector, of als matrix wordt beschouwd dient men uit de context op te maken. Het zou misverstanden kunnen voorkomen als men deze matrices met haakjes voorzag.
Gaarne voor belangstellenden aanbevolen.

Burgers

Prof. dr. G. R. Veldkamp, *Kinematica*, 215 p., Scheltema en Holkema, Amsterdam.

De Kinematica is voor de wiskundige een mooi stuk meetkunde. Daar het vak nooit op de middelbare school is gedoceerd, zullen velen er onwennig tegenover staan. Het is dan ook speciaal bedoeld voor een technisch-theoretische opleiding. Het boek is zeer zorgvuldig geschreven, en het eist veel meetkundig inzicht. Ook de uitvoering is voortreffelijk. Van harte aanbevolen.

B. Groeneveld

Prof. dr. O. Bottema, *Theoretische mechanica*, 237 pag., Scheltema en Holkema, Amsterdam. Voor dit prachtige werk bestaan alleen maar superlatieven. Bij het doorwerken beseffen we weer duidelijk hoe jammer het is dat de theoretische mechanica als zelfstandig vak van het schoolprogramma is verdwenen.

Voor die wiskundeleraren, die het vak vroeger hebben onderwezen of die een speciale belangstelling voor dit vak hebben, is het een bijzonder genoegen het boek door te werken.
Voor velen zal de behandeling van de vergelijkingen van Lagrange, de relatieve beweging en de beweging van een lichaam in de ruimte, waarbij het tolprobleem wordt besproken, een brok schitterende wiskunde vertonen.
De verzorging van de tekst is subliem. U mag dit niet missen.

B. Groeneveld

R. Bens, E. Bouqué, W. Dewilde, F. Smissaert, A. Snauwaert, Opbouw 3, *Wiskunde voor het secundair onderwijs*, Wesmael-Charlier, Namen, 1970, XVI+399 blz.

Het boek is bestemd voor de vierde klasse (d.i. onze derde klasse).
Nadat in deel 2 de leerlingen kennis gemaakt hebben met het begrip reëel getal, wordt nu de optelling, de vermenigvuldiging en de ordening van reële getallen besproken. Dit geschiedt op korte en duidelijke wijze. In een bestek van 12 blz. worden niet alleen ordening, optelling en vermenigvuldiging gedefinieerd, maar worden de fundamentele eigenschappen ervan ook bewezen, zodat het geordende lichaam van de reële getallen tot stand komt. Een knap stuk werk.
Vectoren hebben de leerlingen al leren kennen. In dit deel wordt het vectorvlak geïntroduceerd en daarmee het rekenen met vectoren. Eerst komt alleen de optelling en de scalaire vermenigvuldiging ter sprake, later echter ook het inprodukt. Daarmee is de grondslag gelegd voor de behandeling van de meetkunde als theorie van het vectorvlak. Met behulp van het inprodukt worden de goniometrische verhoudingen gedefinieerd.
Hiermee is opgesomd, wat dit deel biedt aan essentiële kennisuitbreiding. Daarnaast wordt een zeer groot deel van het boek besteed aan kennisverbreding. In een recensie van Opbouw 1 heb ik me met bezorgdheid afgevraagd, of in het Belgische onderwijs wel de nodige aandacht aan de techniek geschonken zou worden. Mijn vrees blijkt nu ongegrond. In dit deel wordt, nadat het lichaam van de reële getallen ingevoerd is, op ruime schaal aandacht besteed aan de techniek van het rekenen binnen dit lichaam. Het deel blz. 147–228 is geheel aan deze techniek gewijd. Hier vinden we alle berekeningen, die bij ons in de eerste klas plachten te geschieden. Daarna komen de vergelijkingen en de ongelijkheden van de eerste graad aan de orde. Waarbij ook de stelsels van twee vergelijkingen met twee veranderlijken en hun grafieken een beurt krijgen.
Nadat het euclidische vectorvlak tot stand gekomen is, vinden we een behandeling van de cirkel, stelling van Pythagoras, berekeningen in de driehoek, gelijkvormigheid. En hier komen ook de vierkantswortels ter sprake, waarvan de existentie door middel van de inmiddels verkregen meetkundige resultaten gefundeerd wordt.
Ik heb respect voor de collega's, die kans zien dit boek in één jaar door te werken.

P. G. J. Vredenduin

Arnold Kirsch, *Elementare Zahlen- und Gröszenbereiche* (Moderne Mathematik in elementaren Darstellung 10), Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1970, 250 pag.

De ondertitel 'eine didaktisch orientierte Begründung der Zahlen und ihrer Anwendbarkeit' wil aangeven, dat niet een opbouw van het getallensysteem wordt gegeven, zoals in de wiskunde gebruikelijk is, maar dat het boek aan de docent de nodige achtergrond-kennis en

-inzicht beoogt te bieden, die aansluiten bij de behandelingsmethode bij het onderwijs. Hier worden b.v. de natuurlijke getallen min of meer intuïtief als een soort aantal-aanduiding ingevoerd. Dientengevolge vindt men in dit boek deze getallen gedefinieerd als de positieve eindige kardinaalgetallen, welke op hun beurt weer door een representant worden bepaald. B.v. is bij definitie 2 = card {Adam, Eva}. Uit dit voorbeeld blijkt al, dat van het verzamelingsbegrip wordt uitgegaan, terwijl natuurlijk ook het afbeelden een noodzakelijke rol vervult. Zoals in het voorbericht duidelijk wordt uiteengezet, is het de bedoeling de bij het inleidende onderwijs gebruikte, maar meestal niet genoemde en nog minder bewezen geldigheid van bepaalde uitgangspunten nauwkeuriger te formuleren en te rechtvaardigen, opdat de docent 'weet, wat hij doet'. – Met veel genoegen heb ik dit werk en ook verschillende van de vele opgaven bekeken.

H. W. Lenstra sr.

Sterregids 1971, samengesteld door Lic. Jean Meeus met een bijdrage van Dr. T. de Groot, Wolters-Noordhoff n.v., Groningen, 88 pag., *f* 8,25.

Deze jaarlijkse gids is onmisbaar voor ieder, die belangstelt in de hemelverschijnselen. De inhoud is in de eerste plaats afgestemd op 1971; ook is een artikel opgenomen over 'Infrarode sterren'.
Wie de kosmografieles eens naar buiten en b.v. naar de avond wil verplaatsen zal veel gemak van deze sterregids kunnen hebben. De uitvoering is fraai.

H. W. Lenstra sr.

H. Graham Flegg, *Schakelalgebra*, Prisma-Technica (34).

Het boek geeft methoden aan voor het nagaan en ontwerpen van mogelijkheden bij electrotechnische schakelingen. Dit klinkt voor de wiskundeleraar wellicht niet zo, dat nu zijn belangstelling wordt gewekt. In feite is de aanpak een bijzonder mooi voorbeeld van de toepassing van binaire getallen, de verzamelingsleer, de propositielogica, n-dimensionale ruimten, matrices met Boole-elementen enz. Het kan voor de wiskundeleraar van nut zijn te weten op welke gebieden van de techniek deze theorieën te gebruiken zijn. Overigens zijn de inleidende hoofdstukken over de diverse wiskundige onderwerpen alleen goed te volgen als de lezer reeds behoorlijk ervan op de hoogte is. De uitvoering is redelijk, maar doet wat goedkoop aan.

B. Groeneveld

12e Internationale post-universitaire cursussen

Van maandag 16 tot en met vrijdag 20 augustus worden deze Belgische cursussen weer gehouden, thans in de Rijksuniversiteit van Luik. Er zijn vier secties: wiskunde, natuurkunde, scheikunde en biologie.
Het aantal deelnemers – de cursussen richten zich voornamelijk tot de universitair afgestudeerden, die wensen op de hoogte te blijven van de moderne wetenschappelijke evolutie van hun vak – beliep de laatste jaren tussen 200 en 300, voornamelijk uit de Westeuropese landen, echter ook meer en meer uit Oost-Eurpoa.

Het programma voor de wiskunde vermeldt de cursussen:

Prof. Dr. J. Kuntzmann (Grenoble):

Théories algébriques utiles pour l'étude des graphes
Théorie des relations comme base de la théorie des graphes
Nouveaux points de vue en théorie des graphes
Recherche sur les textes mathématiques d'enseignement.

Prof. Dr. Wiler (Bern)-Prof. Dr. D. Mange (Lausanne):

Freie Boolesche Algebren

Prof. Dr. J. Teghem (Brussel) en Dr. J. Loris-Teghem (Brussel)

Processus stochastiques et phénomènes d'attente

Dipl.-Ing. H. Petersen (Aaken) en Dipl.-Ing. H. Dautzenberg:

Many-valued algebras.

Het geheel staat onder voorzitterschap van Prof. A. Cottenie.

Men kan aanmeldingsformulieren en het volledige programma aanvragen bij de heer P. Mispelter, Ministerie van Nationale Opvoeding, Rijksadministratief Centrum, wijk Arcades Bureau 3065, 1010 Brussel.

De kosten bedragen 100 BFrs voor de inschrijving, verder 175 BFrs per nacht voor logies en ontbijt en 50 resp 40 BFrs voor de middag- en avondmaaltijd.

De laatste jaren was ervan Nederlandse zijde weinig belangstelling. Prof. Cottenie ziet gaarne weer Nederlandse leraren (en andere belangstellenden) komen. Wij bevelen gaarne aan.

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Elemente der Mathematik, XXIV^6–XXV^4, november 1969–juli 1970.

H. Bieri, Extremale konvexe Rotationskörper im V.F.M.-Problem des R_3;
M. Abramson, An elementary set partition problem;
M. Goldberg, Two more tetrahedra equivalents to cubes by dissection;
B. Bollobás, k-tuples of the first n natural numbers;
M. E. Blamplain, Sur l'équation diophantienne $(x^2-1)^2+(y^2-1)^2 = (z^2-1)^2$.

J. Krames, Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Vivani-Kurve;
E. Schröder, Über Krümmungen höherer Ordnung;
D. Pedoe, The missing seventh circle;
G. R. Veldkamp, Die Jakobische Achsenkonstruktion einer Ellipse;
J. Laub, Premier congrès internationale de l'enseignement mathématique.

H. Hadwiger, Zentralaffine Kennzeichnung des Jordanschen Inhalts;
E. T. Steller, Theorems related to Wallace's line;
G. Eisenreich, Zur Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen;
J. Binn und P. Wilker, Mathematische Problemwettbewerbe im Kanton Berns.

F. Wille, Zwei Überdeckungssätze für die n-dimensionale Kugel;
F. Hohenberg, Einige Figuren der erweiterten Oktaedergruppe.;
E. Kreyszig, Ein Satz über Matrixeigenwerte;
J. Nagatomo, An elementary proof of Tucker's theorem;

S. Piccard, Nachruf Waclaw Sierpinski (1882–1969).
B. L. van der Waerden, Ein Satz über räumliche Fünfecke;
J. E. Wetzel, Triangular covers for closed curves of constant length;
W. Lüssy und E. Trost, Zu einem Satz über räumliche Fünfecke;
E. Heil, Affine Scheitel von Ovalen;
H. Wimmer, Über eine spezielle Differenzengleichung.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

260 Een torus wordt in $4 \cdot 4 = 16$ 'vierkanten' verdeeld, d.w.z. in 16 congruente delen begrensd door vier breedtecirkels en vier lengtecirkels. Elk vierkant wordt rood of zwart geschilderd zo, dat elk patroon van $2 \cdot 2$ kleuren precies éénmaal voorkomt. Onder een patroon van $2 \cdot 2$ kleuren verstaan we b.v.

rood zwart of rood rood
zwart rood rood zwart.

(Mevr. B. C. Dijkstra-Kluyver)

261 Wat is het kleinste natuurlijke getal, dat precies 6^6 delers heeft? (naar een opgave van G. Cool, Goldern, Zwitserland)

Oplossingen

258 Op hoeveel manieren kunnen 88 guldens verdeeld worden over vier spaarpotten; er mogen spaarpotten leeg blijven.

De guldens stellen we voor door het symbool 0, de spaarpotten door het symbool 1. Een verdeling van guldens over de spaarpotten, waarbij in de eerste spaarpot 3 guldens, in de tweede nul guldens, in de derde 2 guldens en in de vierde 1 gulden gedaan wordt, stellen we voor door:

0 0 0 1 1 0 0 1 0 1.

In ons geval gaat het er dus om een 'getal' te vormen van $88+4$ cijfers, waarvan het laatste cijfer een 1 is, terwijl van de overige er 88 een 0 en 3 een 1 zijn. We moeten dus uit 91 plaatsen er 3 aanwijzen, waar we een 1 zetten. Dit kan op $\binom{91}{3}$ manieren.
Stellen we de voorwaarde, dat er geen spaarpot mag leeg blijven, dan beginnen we met in elke spaarpot 1 gulden te doen. Het probleem is dan teruggebracht tot het vorige met 84 i.p.v. 88 guldens. Het aantal manieren is dus $\binom{87}{3}$.

259 Op hoeveel manieren kan men 88 guldens verdelen over vier spaarpotten? Er mogen spaarpotten leeg blijven. De spaarpotten hebben 'dezelfde kleur'.
We gaan afzonderlijk de aantallen mogelijkheden berekenen bij verschillende soorten verdelingen.

		aantal mogelijkheden
a	in alle vier evenveel guldens	1
b	in drie, maar niet in alle vier, evenveel guldens	29
c	in twee paren evenveel guldens, maar niet in alle vier	22
d	in twee spaarpotten evenveel guldens, maar niet verkerend in een van de vorige gevallen, en wel	
	in twee 0 guldens	43
	in twee 1 gulden	42
	in twee 2 guldens	41
	. . .	
	in twee 29 guldens	14
	in twee 30 guldens	14
	in twee 31 guldens	13
	. . .	
	in twee 43 guldens	1
	correctie: in twee 22 guldens geeft niet 21 maar 22 mogelijkheden, dus nog extra	1
		961

Toen de spaarpotten verschillend van kleur waren, vonden we als totaal aantal mogelijkheden $\binom{91}{3} = 121485$. Daaronder waren de mogelijkheden sub *a* 1 maal gerekend, die sub *b* 4 maal, sub *c* 6 maal, sub *d* 12 maal. Het aantal mogelijkheden met vier verschillende aantallen guldens in de spaarpotten is dus

$$121485-(1+4\cdot 29+6\cdot 22+12\cdot 961) = 109704.$$

Elk van deze 109704 mogelijkheden kan op 24 manieren over de vier spaarpotten verdeeld worden. Zodat we vinden

		aantal mogelijkheden
e	vier verschillende aantallen guldens	4571

Het totaal aantal mogelijkheden is

$$1+29+22+961+4571 = 5584.$$





nieuwe wiskunde

Drs. E. J. Wijdeveld,

NIEUWE WISKUNDE

deel 1, taal en logica
ISBN 90 01 97700 6, 2e druk, geb. f 20,25

deel 2, structuren
ISBN 90 01 97701 4, geb. f 24,00

Nieuwe Wiskunde verdient bij een ieder die met wiskunde en wiskundeonderwijs te maken heeft, een plaats in de boekenkast.

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever.



Wolters-Noordhoff

meetkunde met vectoren

L. R. J. Westermann,

MEETKUNDE MET VECTOREN

deel 1 ISBN 90 01 94920 7, ing. f 11,40
deel 2 ISBN 90 01 94921 5, ing. f 11,05

Een behandeling van vectoren in het platte vlak en in de ruimte.
Geschikt voor:

- de hoogste drie leerjaren van het v.w.o. (b-afdeling en wiskunde-II)
- hoger beroepsonderwijs
- wiskunde l.o. opleiding

Meetkunde met vectoren is voortgekomen uit een experiment van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde.

Verkrijgbaar bij de boekhandel en bij de uitgever



Wolters-Noordhoff

GEMEENTE 's-GRAVENHAGE

Burgemeester en Wethouders roepen sollicitanten op voor de volgende met ingang van het schooljaar 1971/1972 te vervullen betrekkingen van

leraar/lerares in de wiskunde

Maerlant-lyceum Joh. Bildersstraat 11	plm. 13 uur	1e gr.
Gymnasium Haganum Laan van Meerdervoort 57	8 uur	1e gr.
Thorbecke-scholengemeenschap (school voor v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.) Theresiastraat 8	33 uur	1e/2e gr.
Dalton-scholengemeenschap (school voor v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.) Aronskelkweg 1	18 uur 22 uur	1e/2e gr. 3e gr.
Scholengemeenschap „Simon Stevin" (school voor v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.) Zuidlarenstraat 59	voll. betr.	1e/2e gr.
Scholengemeenschap „Hugo de Groot" (school voor v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.) Klaverstraat 7-9	29 uur	1e gr.

Verdeling van deze betrekkingen is mogelijk. Sollicitanten die voorkeur hebben voor een bepaalde school/scholengemeenschap wordt verzocht dit in de sollicitatiebrief te vermelden.

Inlichtingen worden verstrekt door de rectoren. Voor het verkrijgen van huisvesting wordt zonodig medewerking verleend.

Sollicitaties onder nr. 71-14 uiterlijk 14 dagen na het verschijnen van deze oproep aan Burgemeester en Wethouders te zenden.

Inhoud

J. van Lint: Gelijkwaardigheid 323

Prof. Dr. O. Bottema: Verscheidenheden 329, 331

Flat 336

W. Amse: Een niet-aanschouwelijke introductie van de begrippen limiet en continuïteit 337

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren 343

C. P. van Nieuwkasteele: Pythagoras met matrices 344

Zo doe ik het 349

Korrel 351, 352

Op de korrel 354

Boekbespreking 357

Internationale post-universitaire cursussen 360

Didactische literatuur 361

Recreatie 361